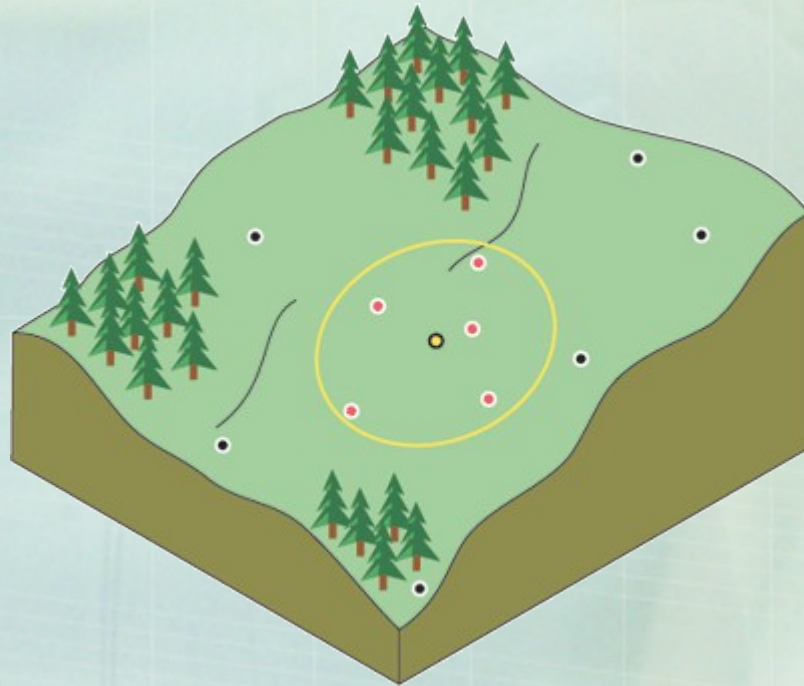
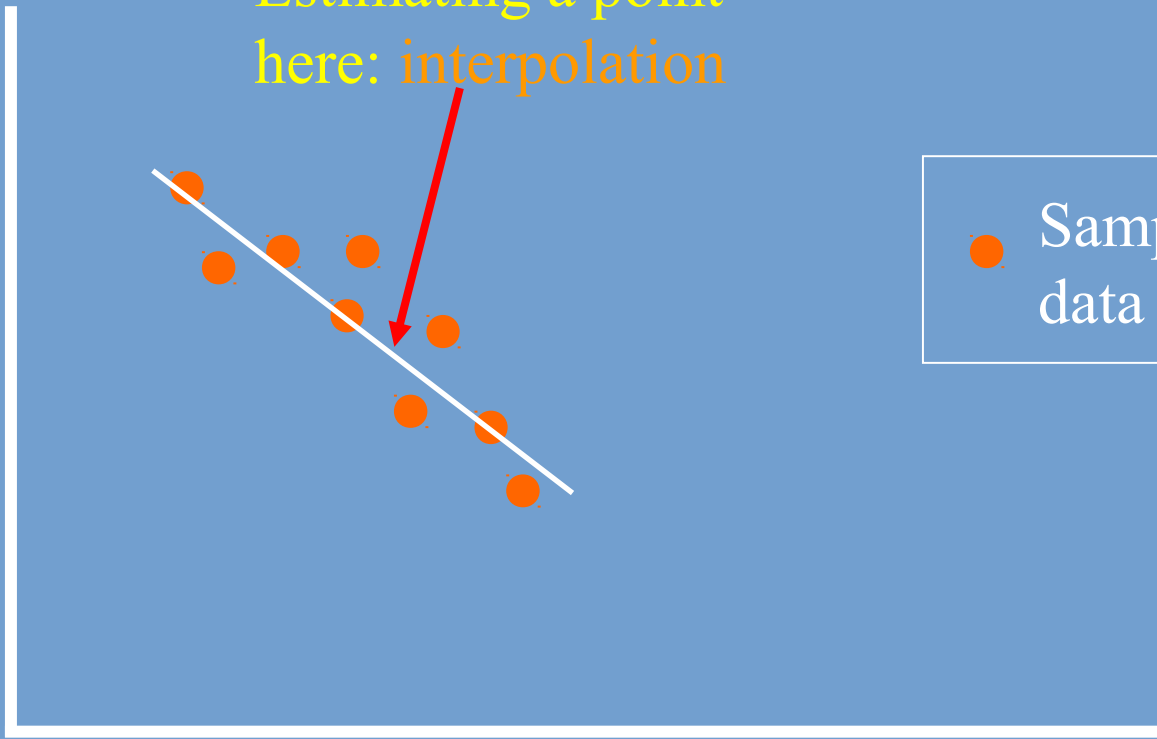


# Interpolación de una superficie a partir de puntos en el espacio



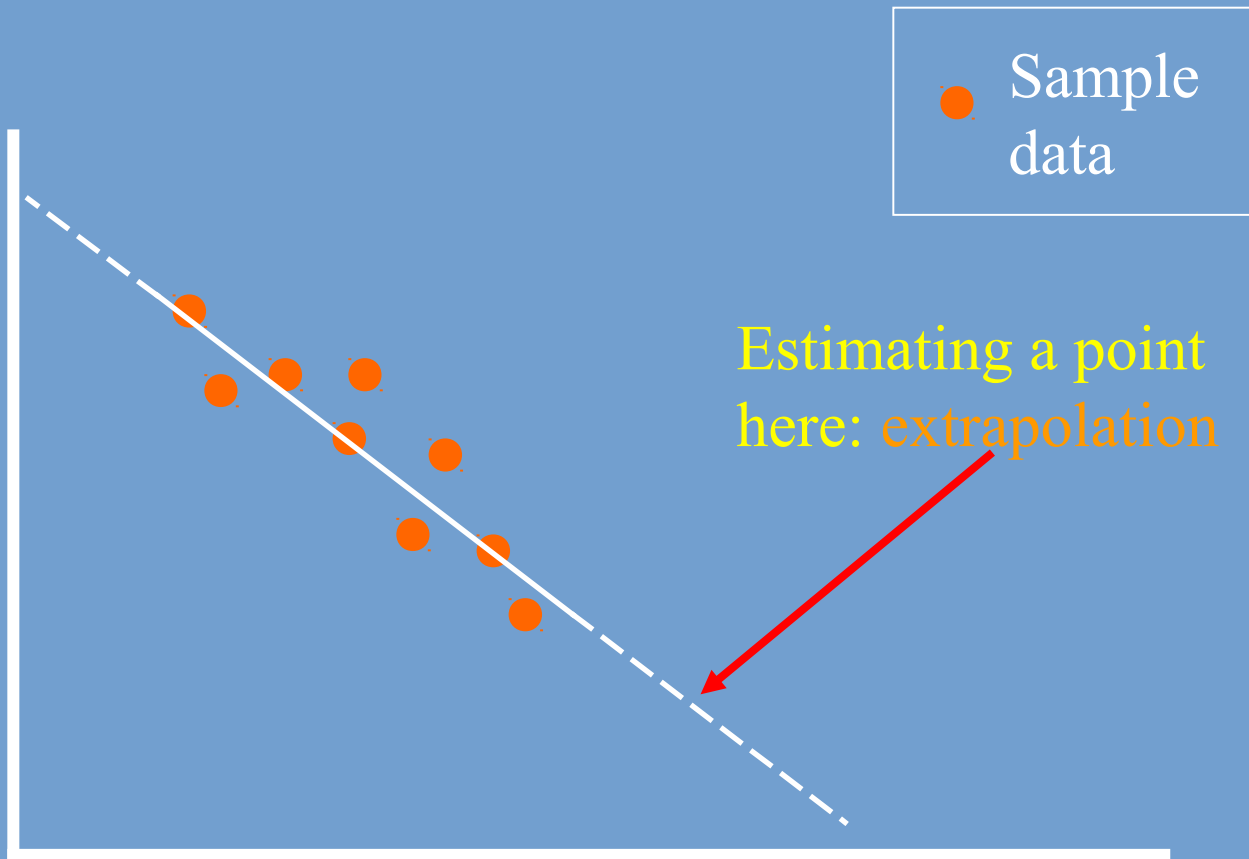
# Interpolación

Estimating a point  
here: interpolation

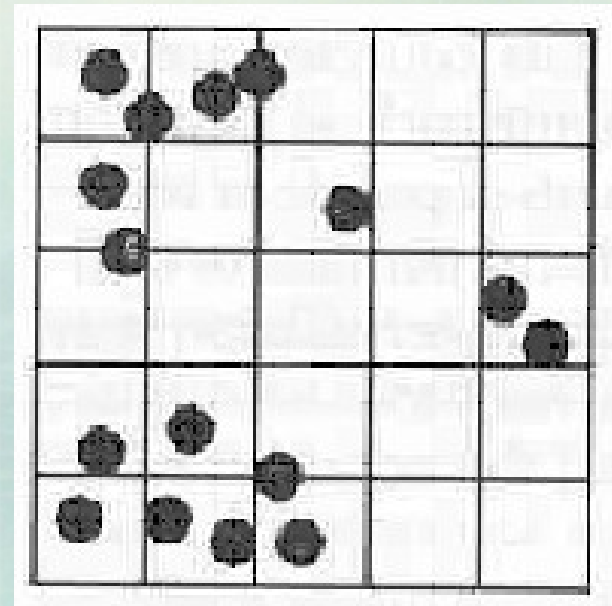
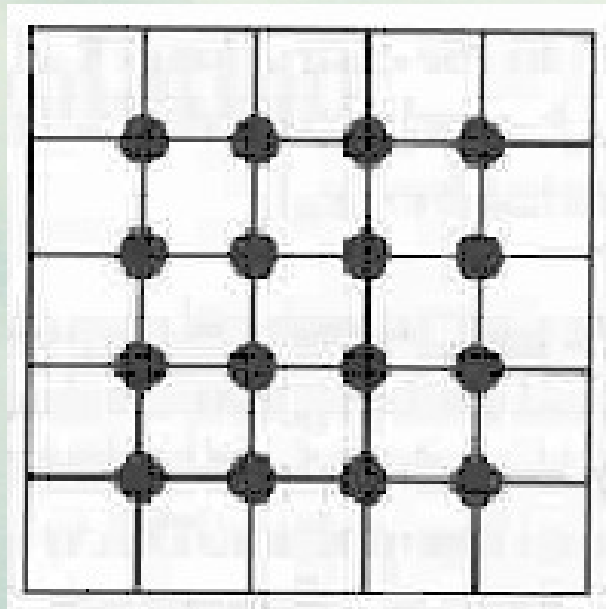


● Sample  
data

# Extrapolación

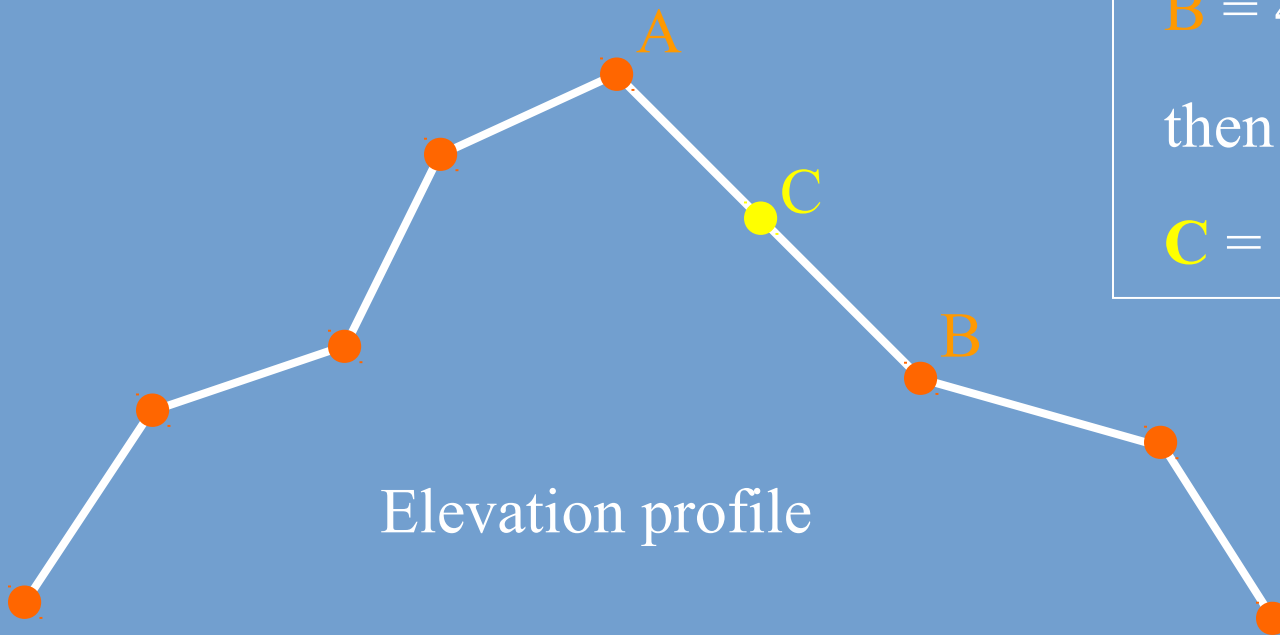


Interpolación puede ser de datos regulares o irregulares



# Interpolación lineal

● Sample elevation data



If

**A** = 8 feet and

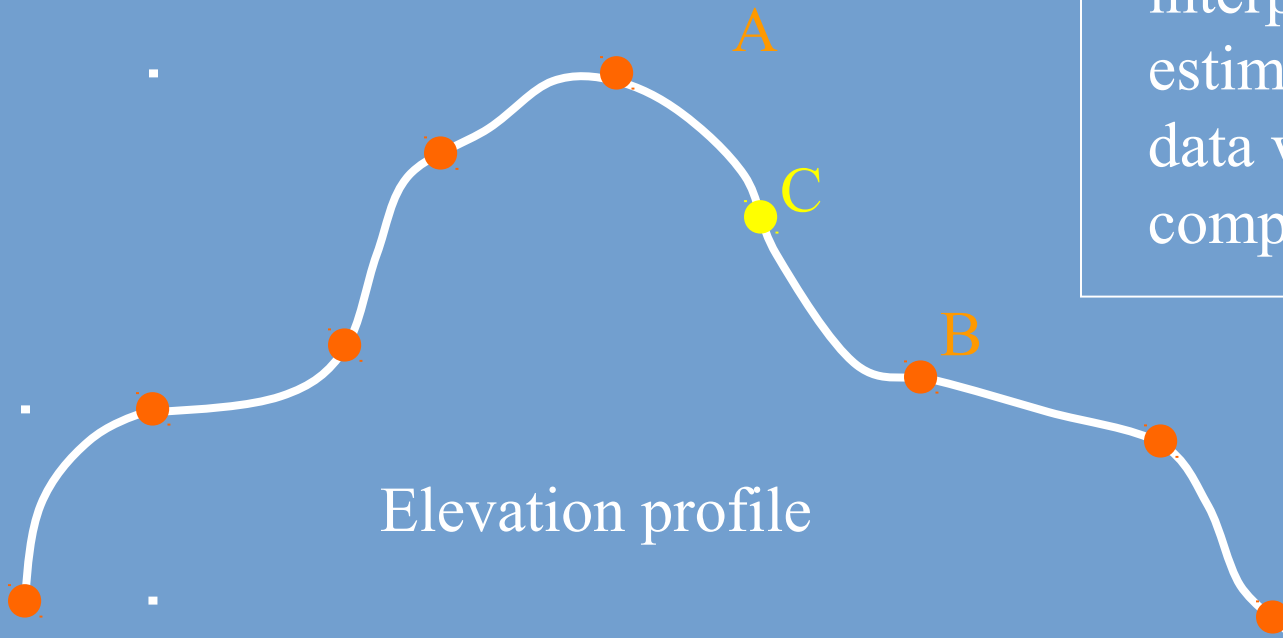
**B** = 4 feet

then

**C** =  $(8 + 4) / 2 = 6$  feet

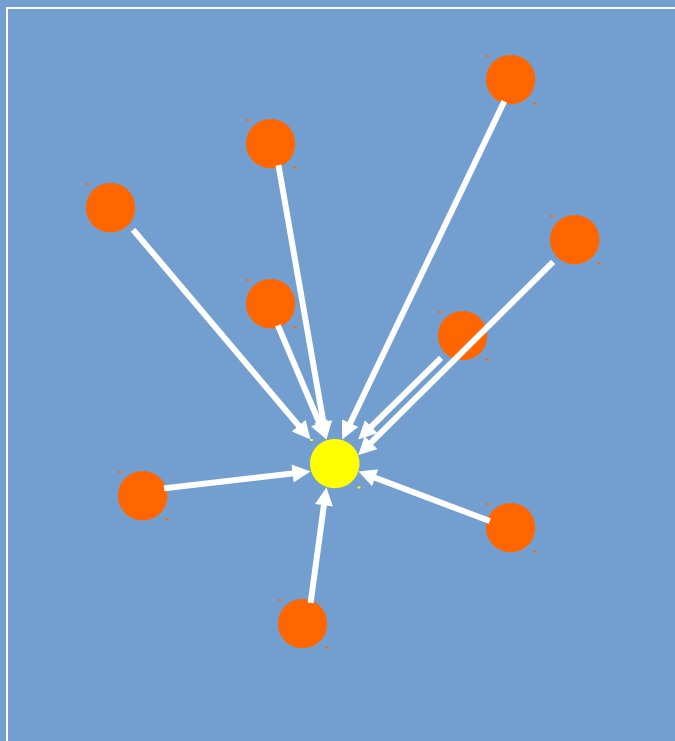
# Interpolación no lineal

● Sample elevation data

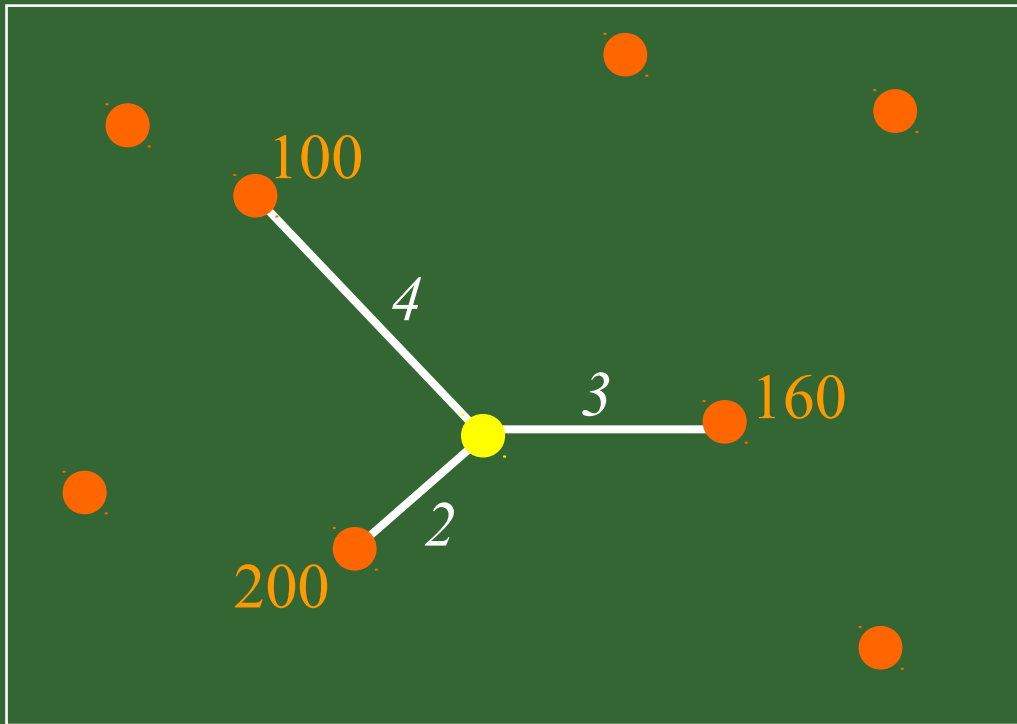


Often results in a more realistic interpolation but estimating missing data values is more complex

# Interpolación global



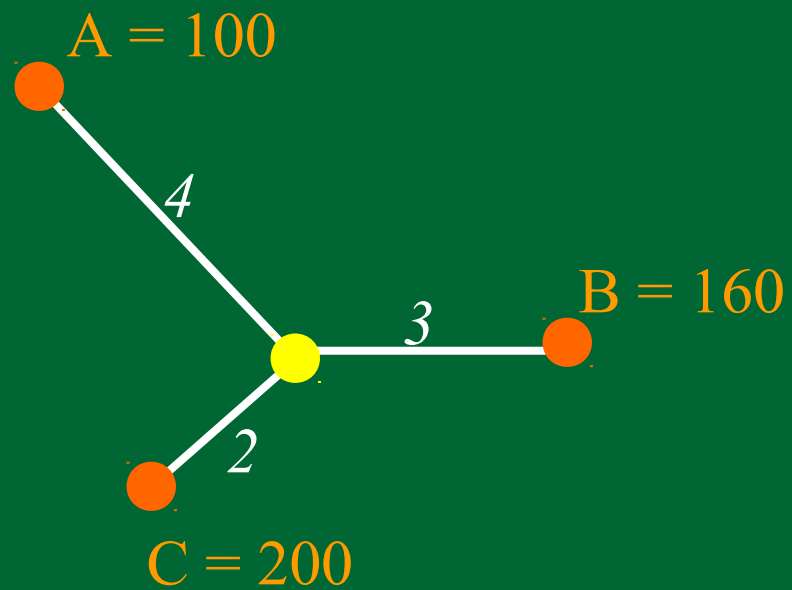
# Inverso de la distancia



IDW:  
Closest 3  
neighbors,  
 $r = 2$



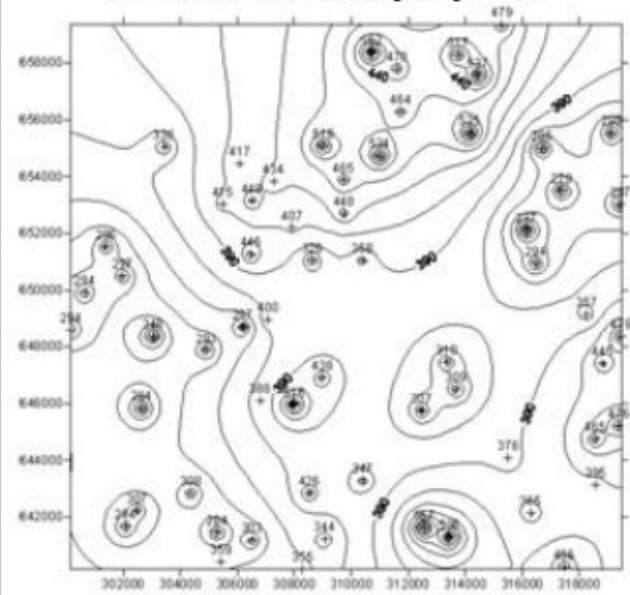
$$z(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{z_i}{d_i^p} \right]}{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{d_i^p} \right]}$$



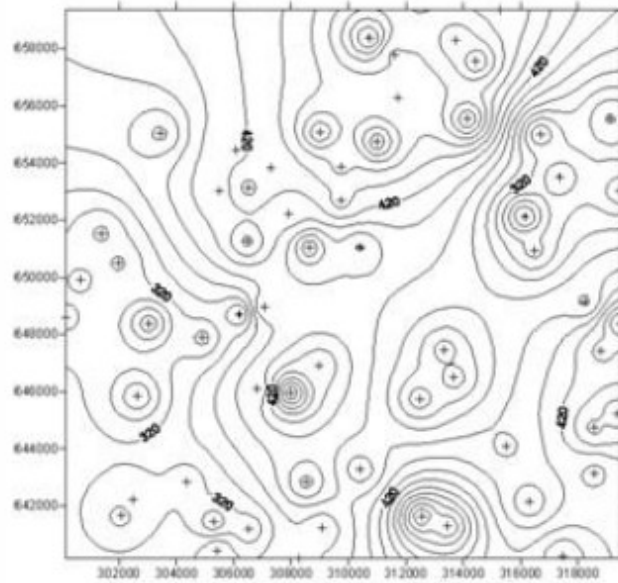
A. Source data — contours



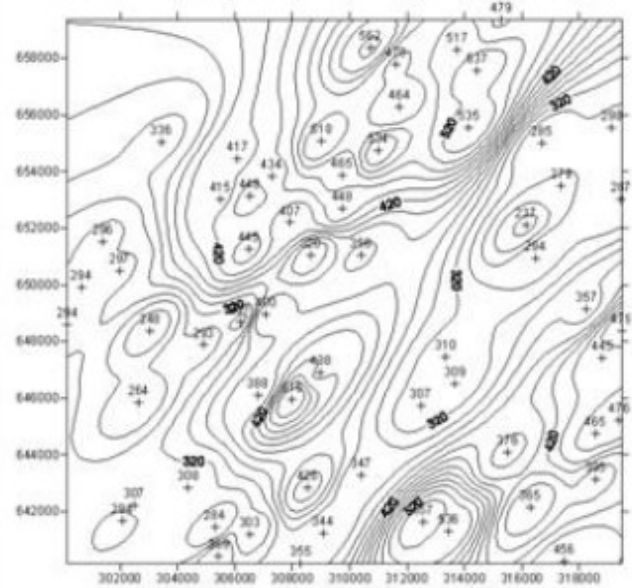
B. Inverse distance weighting —  $1/d$



C. Inverse distance weighting,  $1/d^2$



D. IDW —  $1/d^2$  plus smoothing and anisotropy



# Geoestadística

➤ **El Término Geoestadística surge de la combinación del carácter aleatorio de una Variable con el carácter geológico que indudablemente poseen.**

➤ La Geoestadística , establece que la distribución estadística de la diferencia de una variable entre muestras es similar y depende de la distancia que las separa y su distribución

➤ **Concepto de Variable Regionalizada (VR)**

Es aquella que el valor dado en un punto dentro del yacimiento está en función de su magnitud y de su **soporte** (forma, orientación).



La geoestadística, a diferencia de la estadística en el tratamiento de las muestras, tiene en cuenta la **ubicación de los datos**, en el espacio. Lo que resulta de gran interés en los estudios geológicos mineros.

Por ejemplo:

1-2-3-4-5-4-3-2-1

= media - varianza

2-4-5-1-3-3-1-2-4 (distribución aleatoria)

**Pero su distribución espacial, es distinta, y puede tener una gran importancia en minera.**

# Representación gráfica de los datos espaciales

Antes de iniciar cualquier tratamiento geoestadístico, es necesario un detallado análisis estadístico. Es imprescindible, al menos conocer el tipo de distribución de los datos (¿normal?)

Posteriormente, el inicio conveniente de un tratamiento geoestadístico, es el análisis de la distribución espacial de la/las variables

En este primer paso la utilización de herramientas gráficas sencillas, permiten una visualización rápida de esa distribución espacial. Esto insume su tiempo, pero muchas veces es una importante contribución para la interpretación y control de los futuros resultados geoestadísticos

Mapas de posicionamiento de datos

Mapas de contornos (isolíneas)

Mapas de símbolos

# Continuidad Espacial

- La geoestadística asume que las muestras están correlacionadas. Es esta **Correlación Espacial** la que debemos encontrar en un yacimiento.
- **Datos más cercanos tienen más posibilidades de ser similares que dos alejados.**



# Continuidad Espacial

- Las herramientas para medir la correlación espacial son:

- Gráficas

- Diagrama de dispersión

- Numéricas

- Función de Correlación ( $\rho_h$ ) : 
$$\frac{1}{N(h)} \sum Z_{(x)} \cdot Z_{(x+h)} - m_{(-h)} \cdot m_{(+h)}$$
$$\sigma_{-h} \cdot \sigma_{+h}$$

- Función de Covarianza ( $C_h$ ) : 
$$\frac{1}{N(C)} \sum Z_{(x)} \cdot Z_{(x+h)} - m_{(-h)} \cdot m_{(+h)}$$

**Ecuación del semivariograma (Variograma)**

# Variograma

- El variograma es la herramienta geoestadística básica. Permite la cuantificación de los parámetros geológicos y expresa la correlación espacial entre los valores muestreados.
- En términos muy simples podemos definir el variograma como la media de los cuadrados de las diferencias entre pares de muestras separados por una distancia  $h$ :

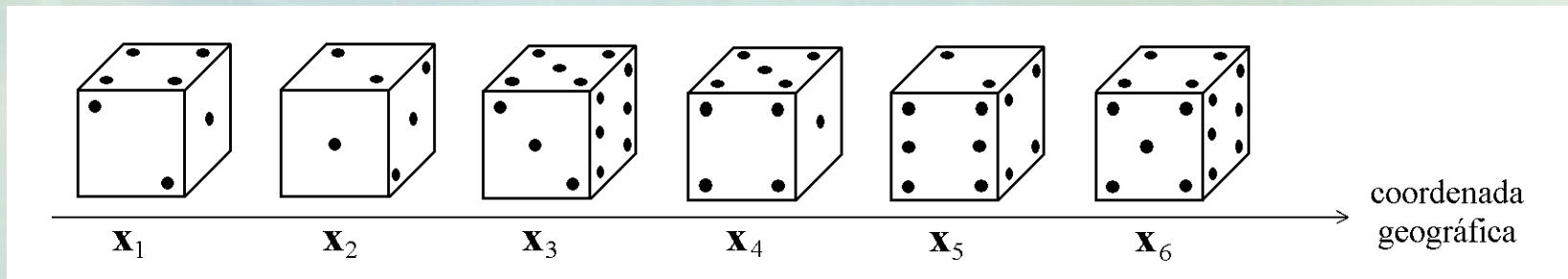
$$Y = \frac{1}{2} N \cdot \sum [ ( Z(x) - Z(x+h) ) ]^2$$



# Los modelos probabilísticos

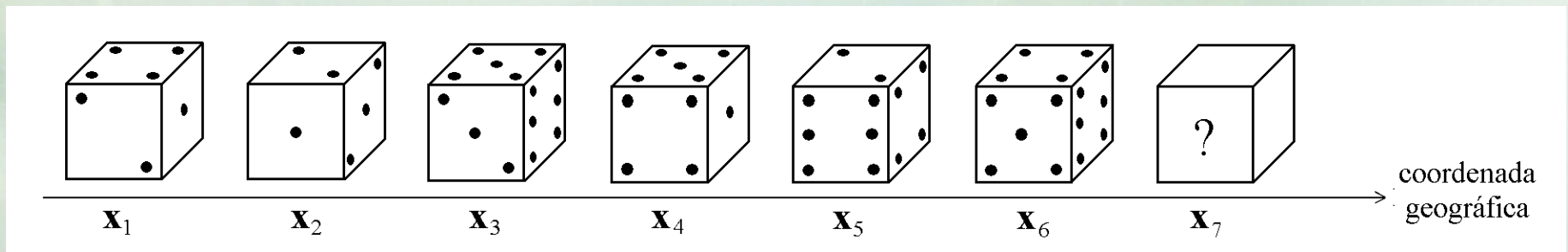
## Límites de la estadística clásica

Se considera las observaciones como resultados (*realizaciones*) independientes de una misma variable aleatoria.



# Los modelos probabilísticos

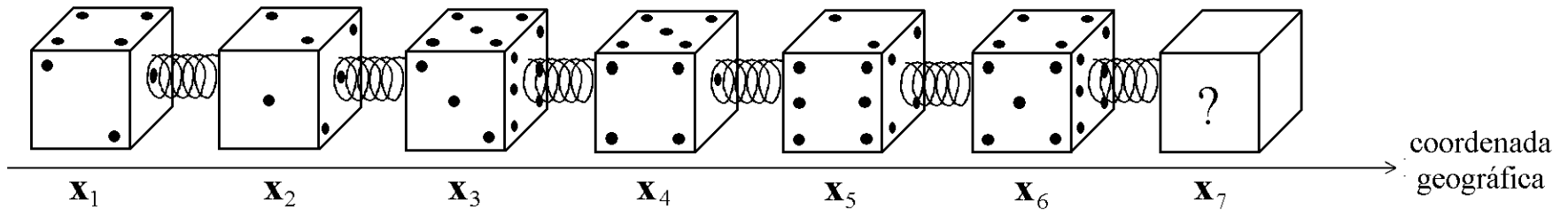
La independencia entre valores impide una previsión precisa de un valor no muestreado.



⇒ la interpretación clásica carece de realismo

# El modelo geoestadístico

Se considera “interacciones” entre las observaciones, de modo de tomar en cuenta sus dependencias espaciales.

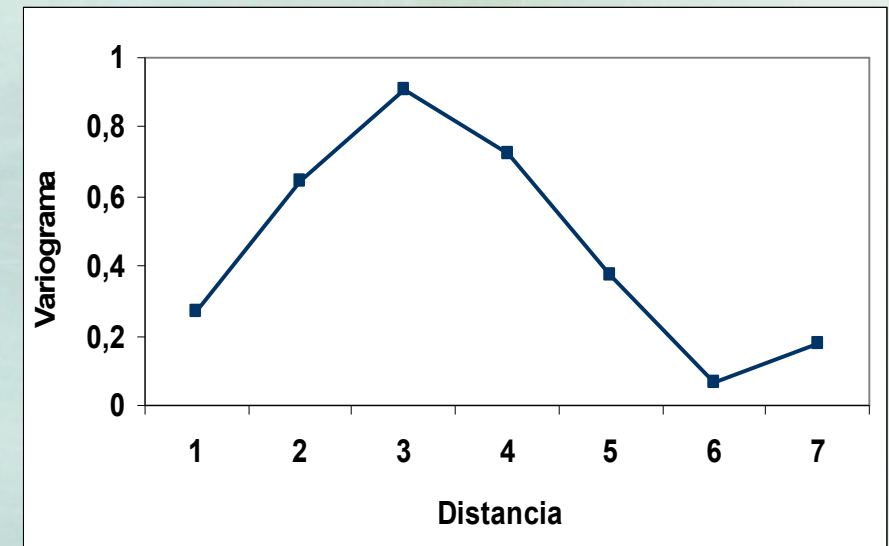
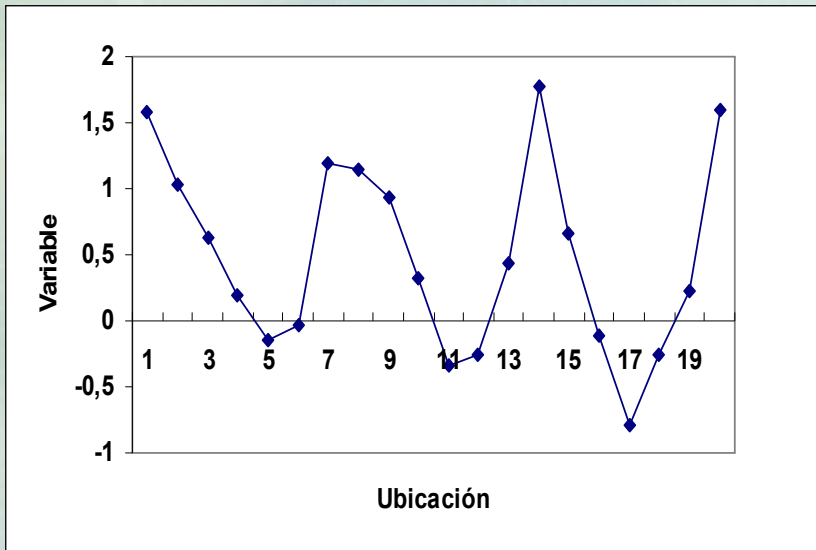
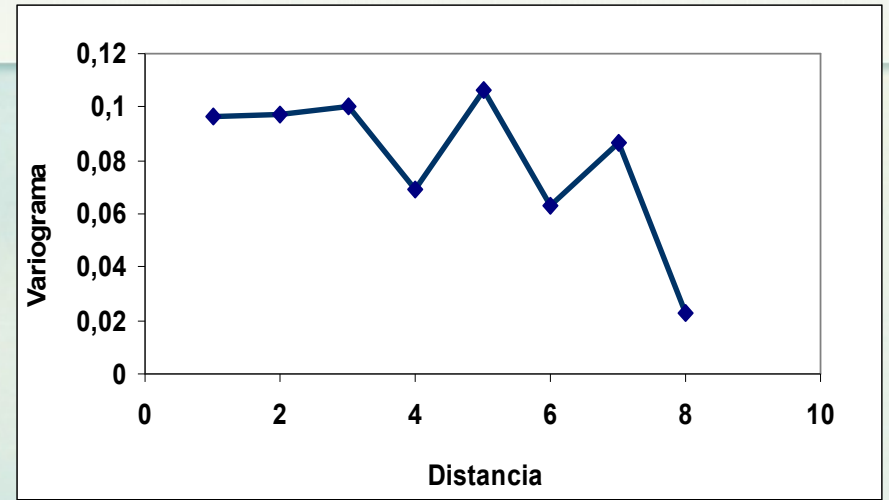
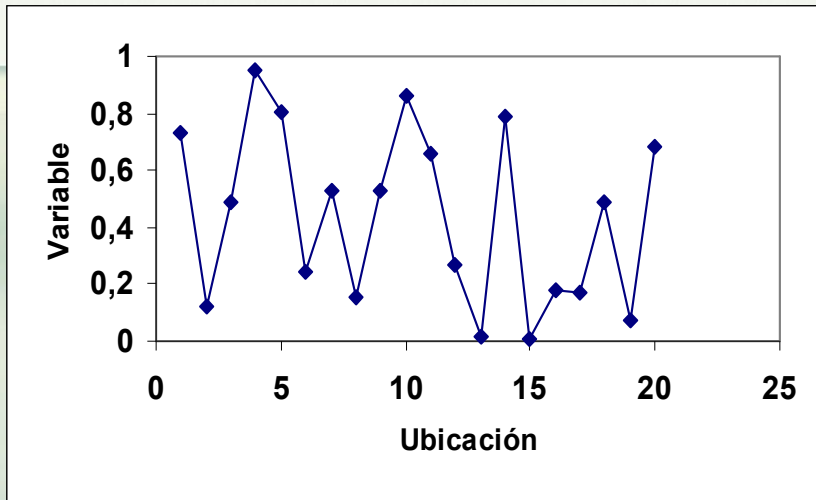


¿Se podrá estimar el valor en un sitio no muestreado gracias a su interacción con los sitios circundantes?

# Objetivo del análisis variográfico

Describir las principales propiedades de la distribución espacial de la variable regionalizada en estudio, más allá de un simple reporte de los valores (perfiles, mapas).

¿Qué tan continua es la variable en el espacio?





# Variograma experimental

Denotemos como  $\{\mathbf{x}_\alpha, \alpha = 1 \dots n\}$  los sitios de muestreo y como  $z(\mathbf{x})$  la variable regionalizada.

El variograma experimental mide la desviación cuadrática promedio entre dos datos en función de su separación:

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2|N(h)|} \sum_{N(h)} [z(x_\alpha) - z(x_\beta)]^2$$

donde  $N(\mathbf{h}) = \{(\alpha, \beta) \text{ tales que } \mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta = \mathbf{h}\}$

$|N(\mathbf{h})|$  es el cardinal de  $N(\mathbf{h})$

# Variograma experimental (5)

## Ejemplo

Consideremos las siguientes observaciones espaciadas cada 100 m

5 3 6 4 2 1 1 2 4 3 2

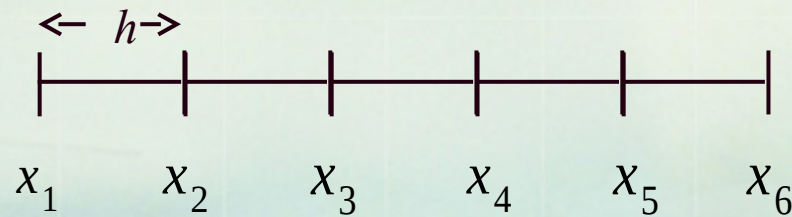
$$\hat{\gamma}(100\text{ m}) = \frac{1}{2 \times 10} (2^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2) = 1.45$$

$$\hat{\gamma}(200\text{ m}) = \frac{1}{2 \times 9} (1^2 + 1^2 + 4^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2 + 3^2 + 1^2 + 2^2) = 2.39$$

$$\hat{\gamma}(300\text{ m}) = \frac{1}{2 \times 8} (1^2 + 1^2 + 5^2 + 3^2 + 0^2 + 3^2 + 2^2 + 0^2) = 3.06$$

## Variograma Experimental-obtención

**Datos Igualmente espaciados:** 
$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (z(x_i) - z(x_i+h))^2$$



$$\gamma(h) = \frac{1}{2*5} \left[ (z(x_1) - z(x_2))^2 + (z(x_2) - z(x_3))^2 + (z(x_3) - z(x_4))^2 + (z(x_4) - z(x_5))^2 + (z(x_5) - z(x_6))^2 \right]$$

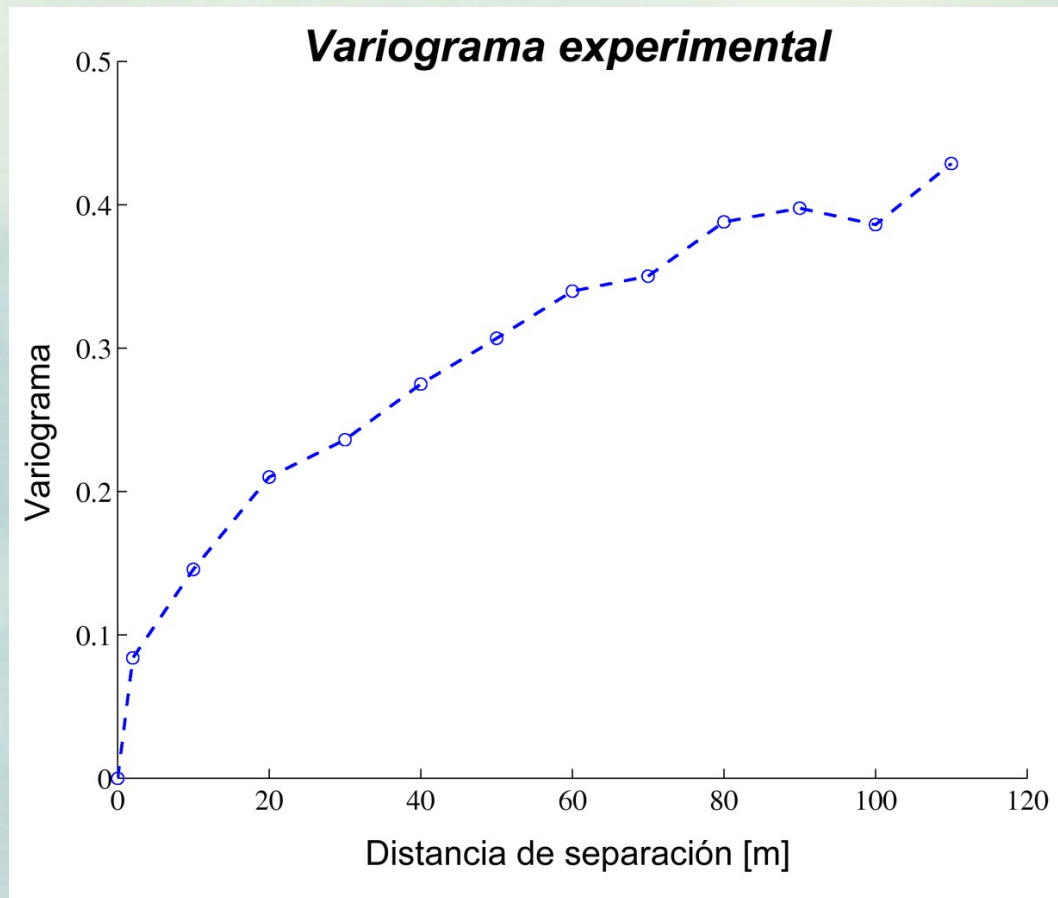
$$\gamma(2h) = \frac{1}{2*4} \left[ (z(x_1) - z(x_3))^2 + (z(x_2) - z(x_4))^2 + (z(x_3) - z(x_5))^2 + (z(x_4) - z(x_6))^2 \right]$$

$$\gamma(3h) = \frac{1}{2*3} \left[ (z(x_1) - z(x_4))^2 + (z(x_2) - z(x_5))^2 + (z(x_3) - z(x_6))^2 \right]$$

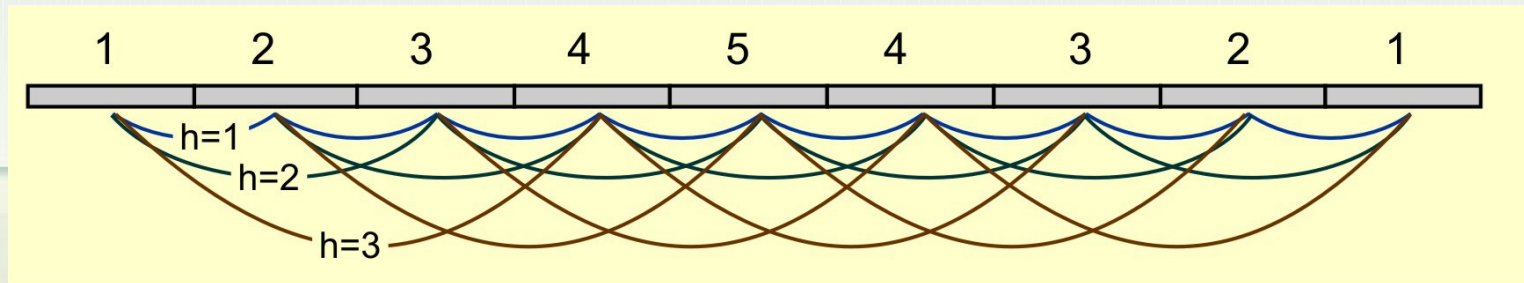


# Variograma experimental (2)

## Ilustración



# Ejemplo

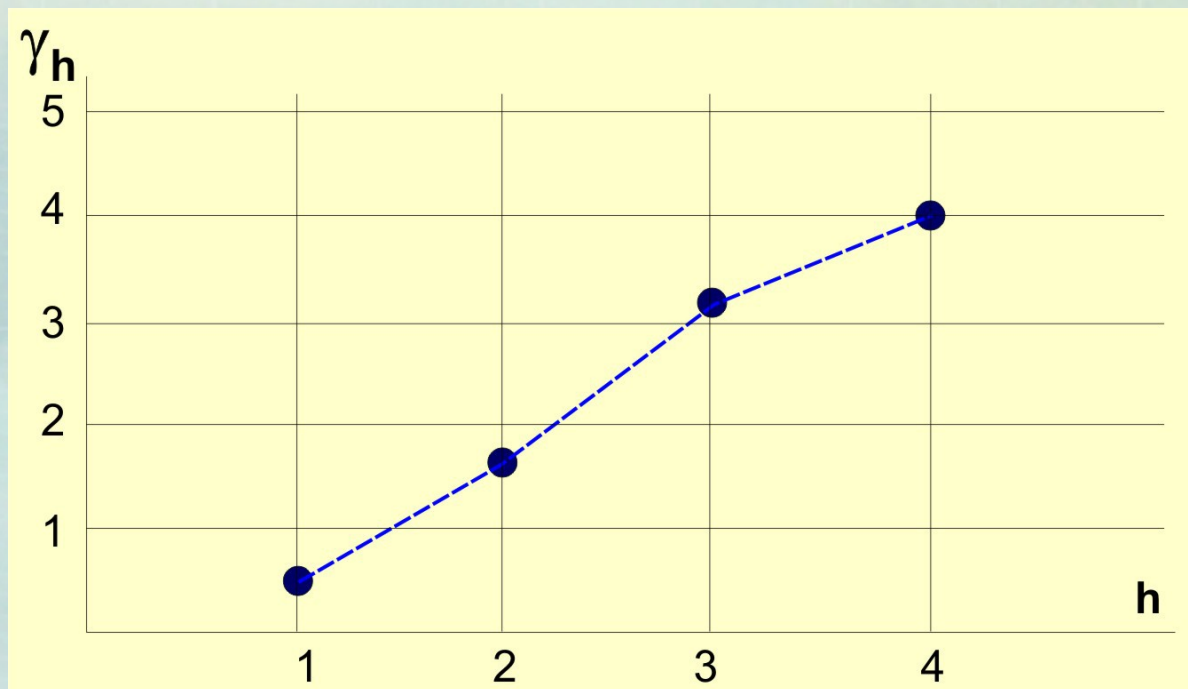


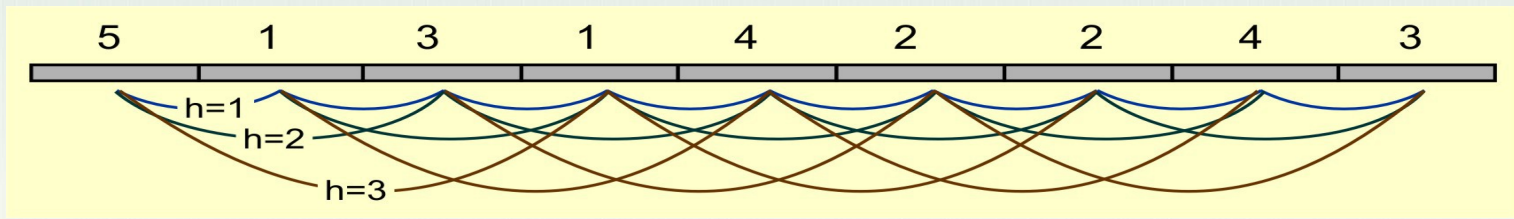
$$h=1; G_h = 1/2 \times 8 [(1-2)^2 + (2-3)^2 + (3-4)^2 + (4-5)^2 + (5-4)^2 + (4-3)^2 + (3-2)^2 + (2-1)^2] = 0,5$$

$$h=2; G_h = 1/2 \times 7 [(1-3)^2 + (2-4)^2 + (3-5)^2 + (4-4)^2 + (5-3)^2 + (4-2)^2 + (3-1)^2] = 1,71$$

$$h=3; G_h = 1/2 \times 6 [(1-4)^2 + (2-5)^2 + (3-4)^2 + (4-3)^2 + (5-2)^2 + (4-1)^2] = 3,17$$

$$h=4; G_h = 1/2 \times 5 [(1-5)^2 + (2-4)^2 + (3-3)^2 + (4-2)^2 + (5-1)^2] = 4$$



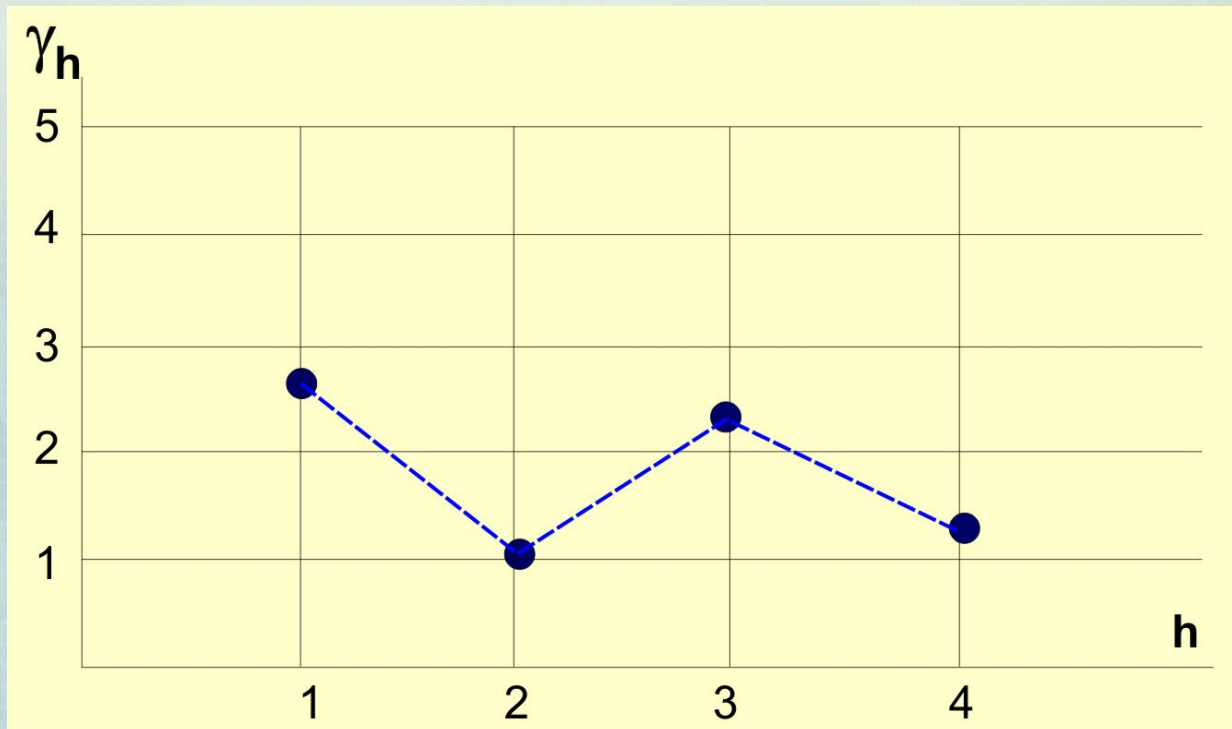


$$h=1; G_h = 1/2 \times 8 [(5-1)^2 + (1-3)^2 + (3-1)^2 + (1-4)^2 + (4-2)^2 + (2-2)^2 + (2-4)^2 + (4-3)^2] = 2,62$$

$$h=2; G_h = 1/2 \times 7 [(5-3)^2 + (1-1)^2 + (3-4)^2 + (1-2)^2 + (4-2)^2 + (2-4)^2 + (2-3)^2] = 1,07$$

$$h=3; G_h = 1/2 \times 6 [(5-1)^2 + (1-4)^2 + (3-2)^2 + (1-2)^2 + (4-4)^2 + (2-3)^2] = 2,33$$

$$h=4; G_h = 1/2 \times 5 [(5-4)^2 + (1-2)^2 + (3-2)^2 + (1-4)^2 + (4-3)^2] = 1,30$$



# Variograma experimental

El variograma muestra características importantes de la variable regionalizada:

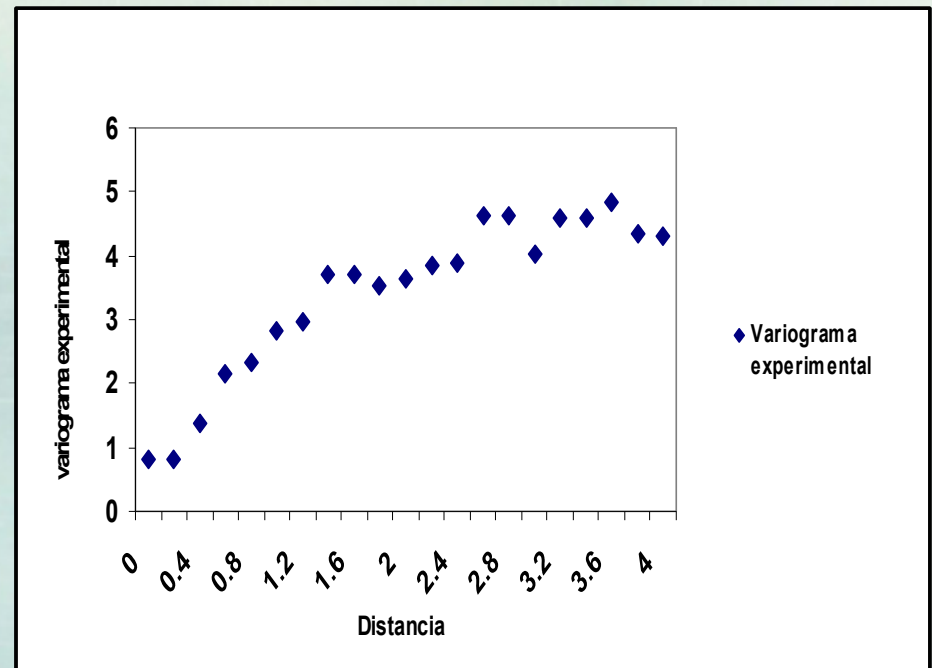
- 1) el crecimiento indica la velocidad con la cual se desestructura la variable en el espacio
- 2) la distancia para la cual se estabiliza el variograma representa la “zona de influencia” de una muestra; se llama *alcance*
- 3) el comportamiento cerca del origen indica qué tan semejantes son dos muestras muy cercanas, o sea, refleja la *continuidad* o *regularidad* de la variable en el espacio
- 4) el cálculo del variograma puede hacerse a lo largo de distintas direcciones del espacio y evidenciar una *anisotropía*



## Variograma Experimental-obtención

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{|x_i - x_j| = |h|} (z(x_i) - z(x_j))^2$$

- Se escoge una dirección  $\theta$
- Se escoge una distancia o *lag*  $h$
- Se calcula  $\gamma$  para valores de  $h, 2h, 3h, \dots, nh$
- Se grafica  $\gamma$  versus los valores  $h, 2h, 3h, \dots, nh$

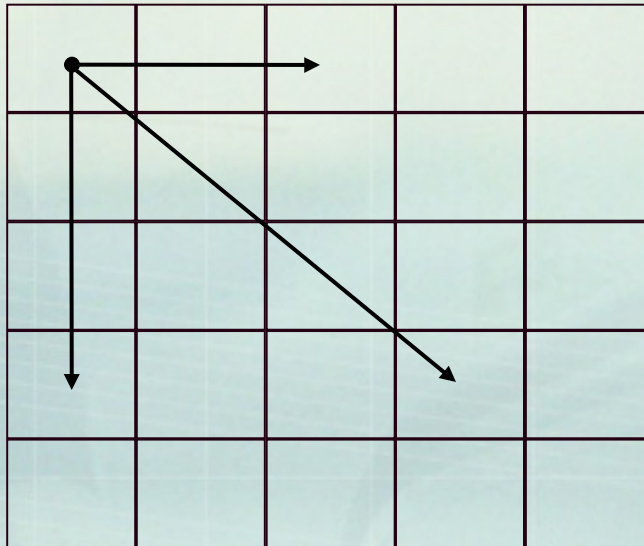


## Variograma Experimental-obtención

Datos Igualmente espaciados:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (z(x_i) - z(x_i + h))^2$$

$\leftarrow h \rightarrow$



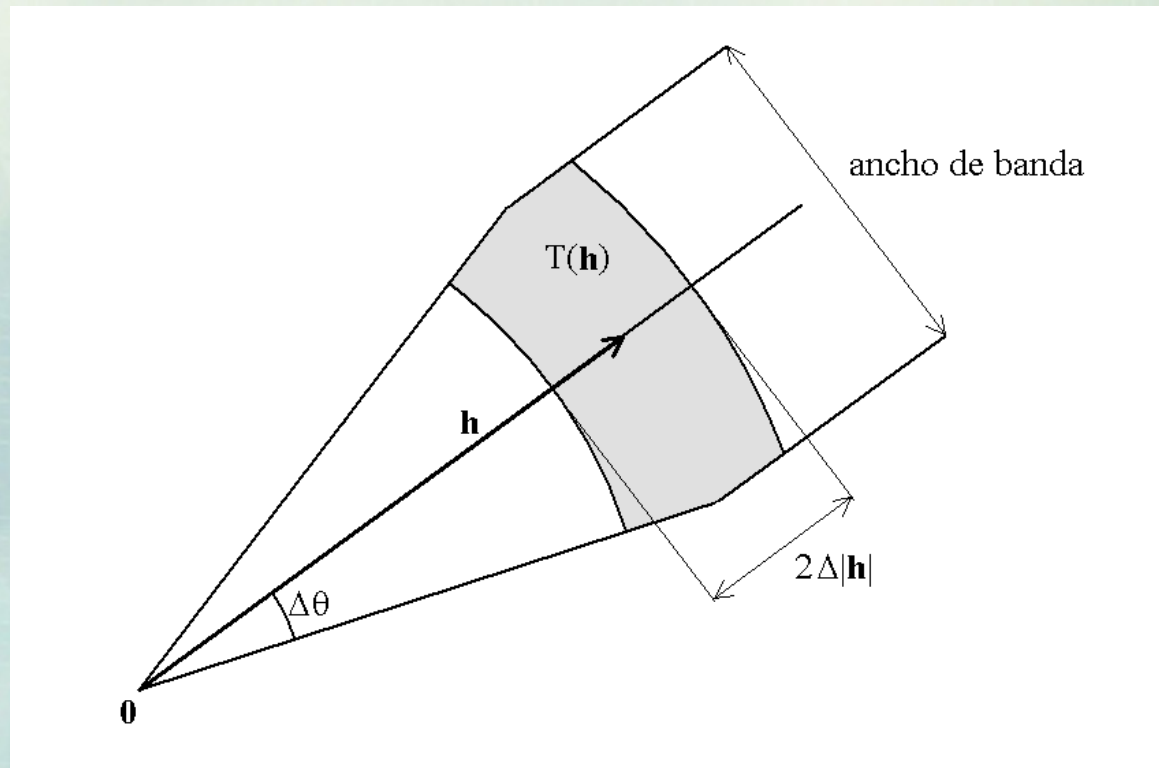
$$(kh, 0), k = 0, 1, 2, \dots$$

$$(0, kh), k = 0, 1, 2, \dots$$

$$(kh, jh), k, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

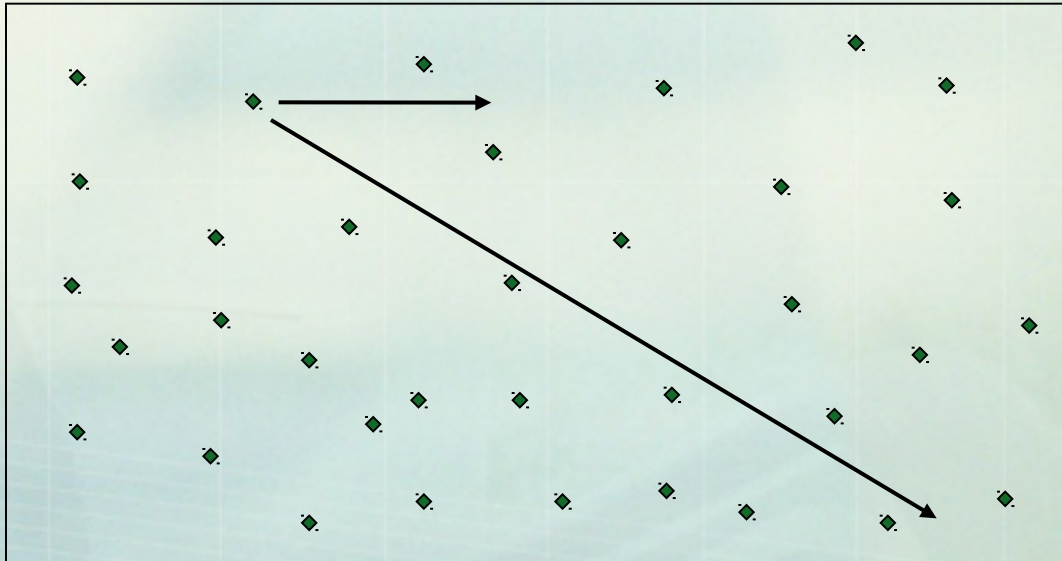
# Variograma experimental (6)

Cuando el muestreo es irregular, se suele definir parámetros de tolerancia, tanto en la longitud del vector  $\mathbf{h}$  como en su orientación



# Variograma Experimental-obtención

Datos Irregularmente espaciados:



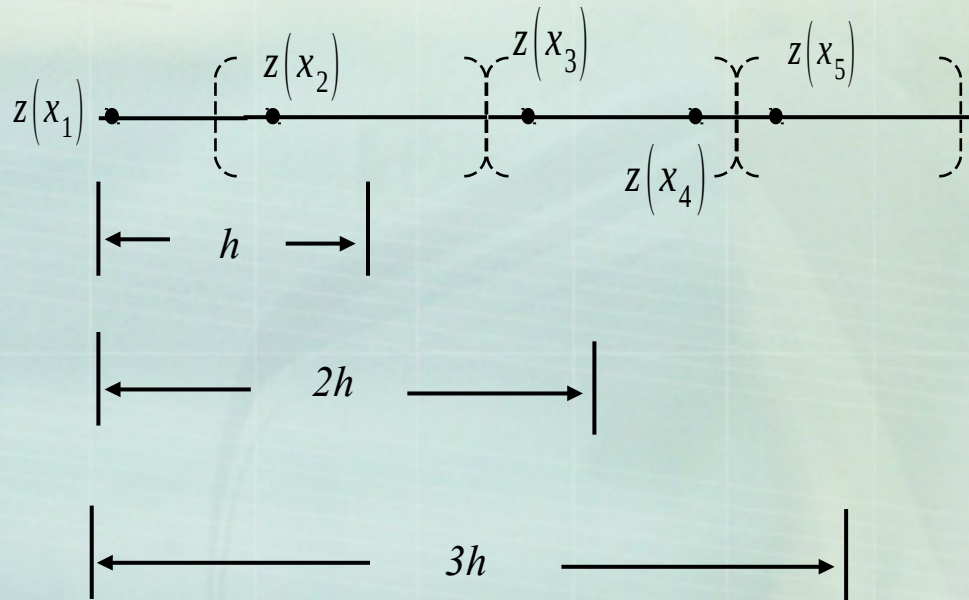
- Puede ocurrir que no existan valores de la variable a la distancia  $h$
- Puede ocurrir que no existan valores de la variable en la dirección  $\theta$



# Variograma Experimental-distancia

- Clases de distancia:

Para cada *lag*  $h$  se define una tolerancia  $\Delta h$  y se utilizan únicamente los puntos que se encuentran a una distancia mayor o igual a  $h - \Delta h$  y menor que  $h + \Delta h$



# Variograma experimental

El variograma experimental es poco estable cuando

- la distancia  $h$  considerada es grande
- el muestreo es muy irregular o preferencial
- la distribución de los datos es muy asimétrica o contiene valores extremos

# Variograma teórico

# Variograma teórico

El variograma experimental requiere ser modelado:

- es **imperfecto** (los puntos obtenidos son experimentales, luego están sujetos a imprecisiones)
- es **incompleto** (se calculó de manera discreta a lo largo de algunas direcciones del espacio)

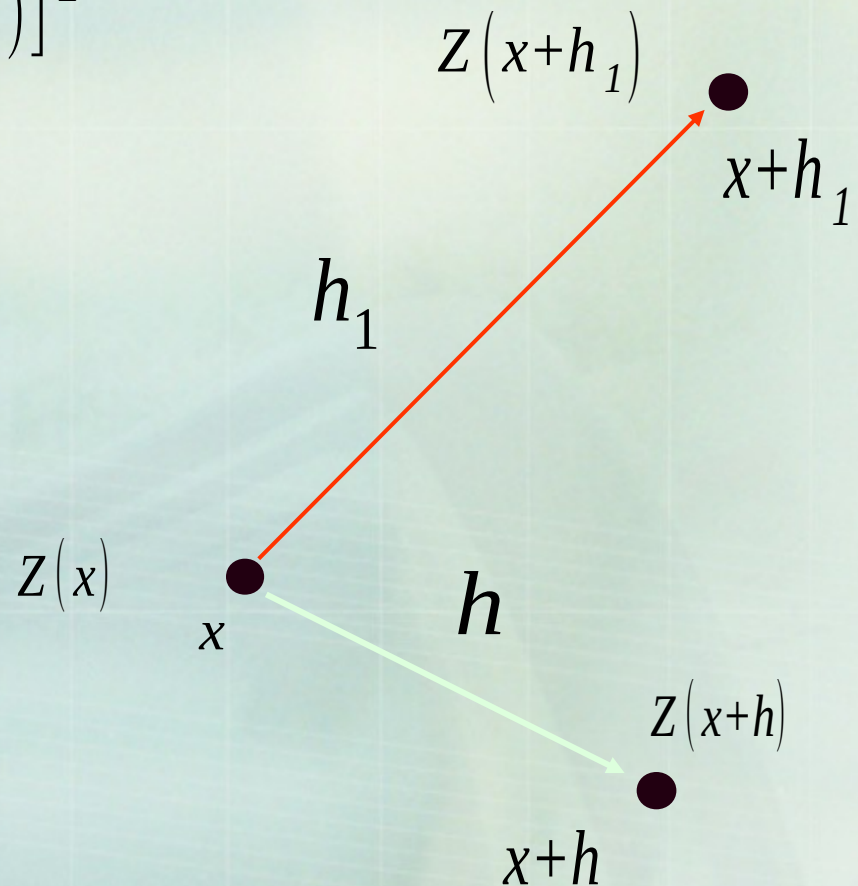
El variograma teórico se define al considerar los valores como aleatorios (denotados con mayúscula) y al utilizar una esperanza matemática:

$$\gamma(\mathbf{h}) = E \{ [Z(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - Z(\mathbf{x})]^2 \} / 2$$



$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E [Z(x) - Z(x+h)]^2$$

**Detección de características que varían según la dirección y la distancia**



# Variograma teórico

## Características esenciales del variograma

- Comportamiento en el origen

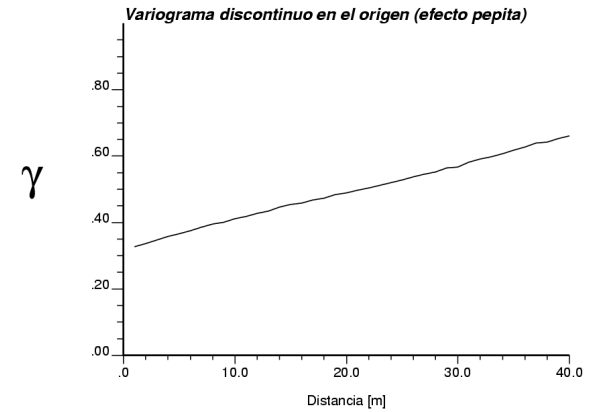
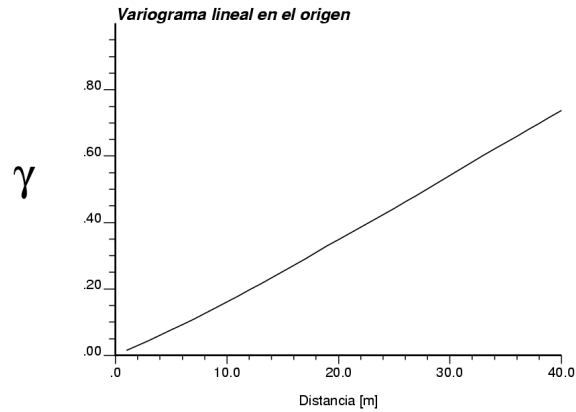
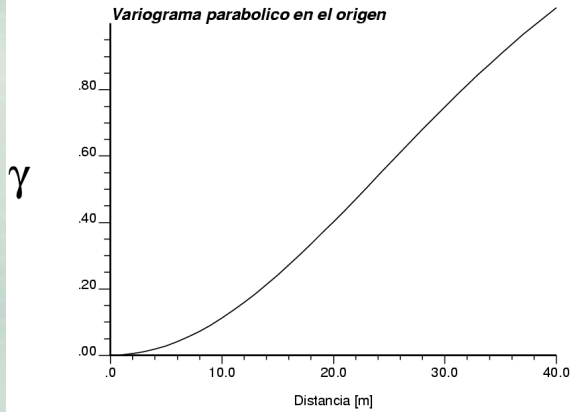
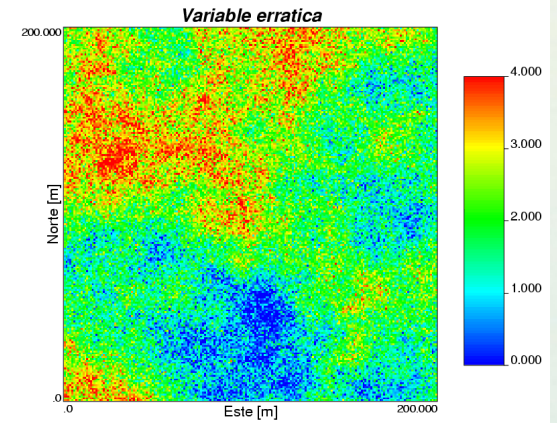
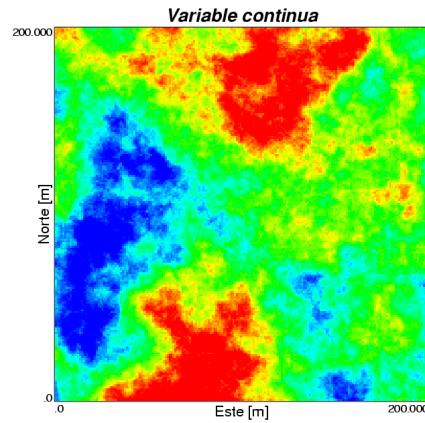
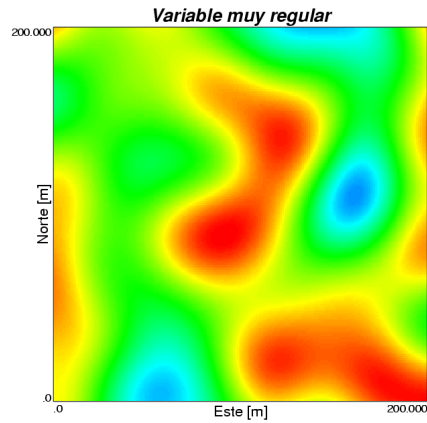
Mientras más regular el variograma en el origen, más regular la variable regionalizada en el espacio. Se distingue tres tipos de comportamiento para el variograma:

*derivable*: variable regionalizada muy suave

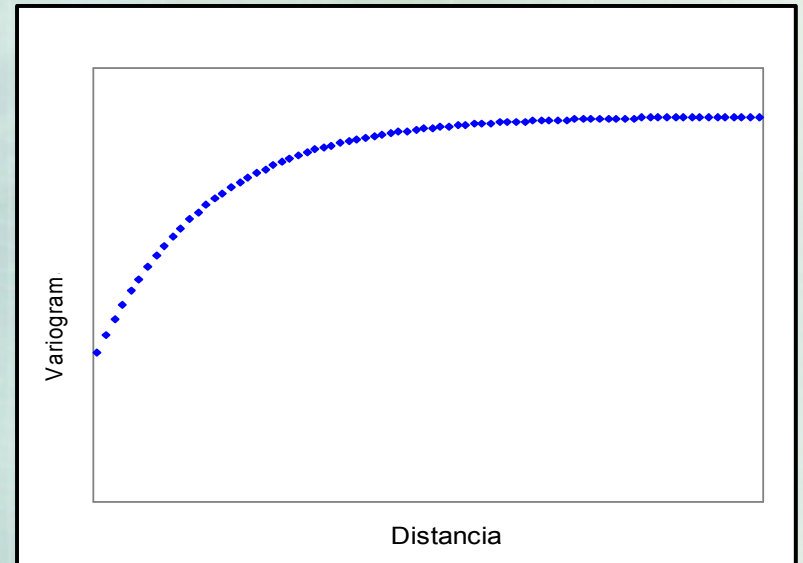
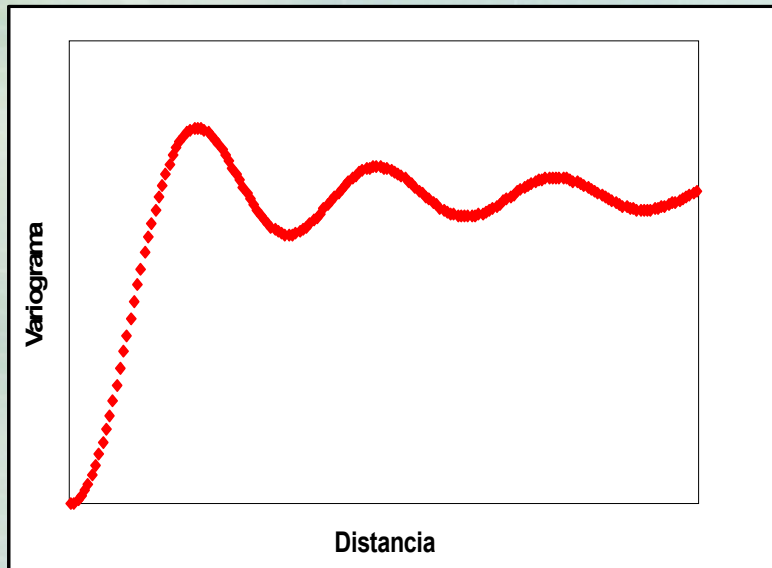
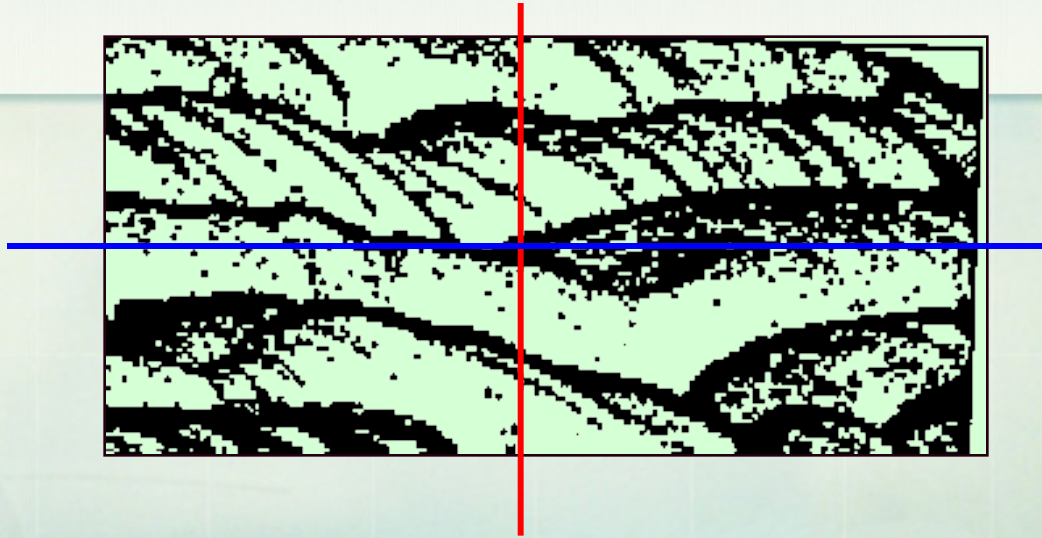
*lineal*: variable regionalizada continua

*discontinuo* (“efecto pepita”): variable regionalizada errática

# Variograma teórico



# Diferencias que se ven en el variograma

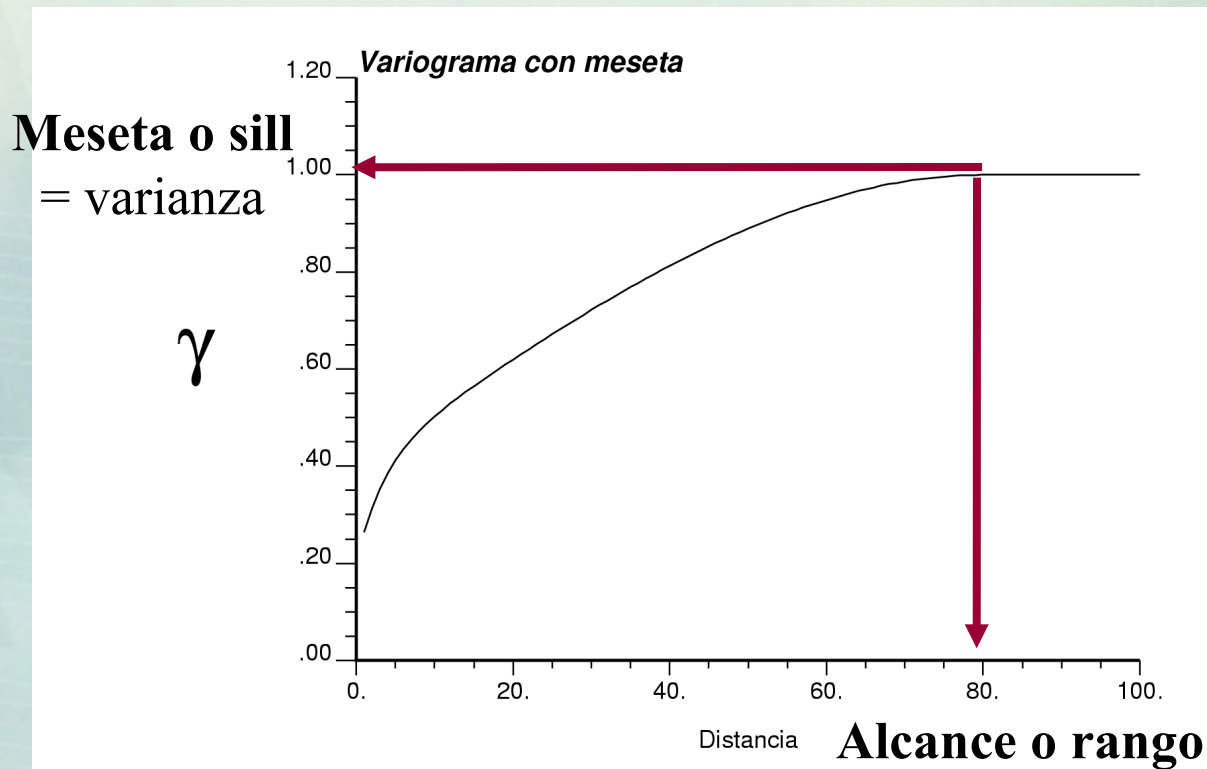




# Variograma teórico

- Comportamiento al infinito

Frecuentemente, el variograma se estabiliza en torno a una meseta cuando la distancia crece infinitamente.



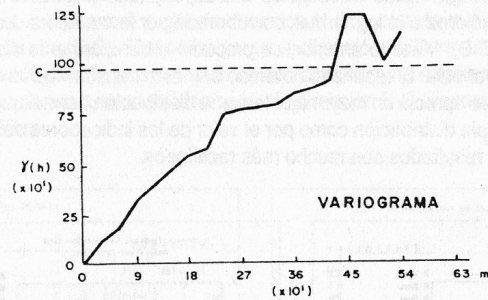


Figura 2.9. Semivariograma de un yacimiento estratiforme con mineralización muy continua (Arteaga et al, 1991).

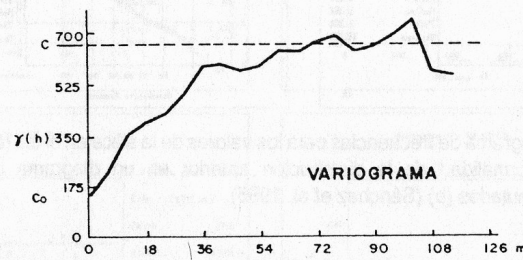


Figura 2.10. Semivariograma de un yacimiento de pórfido cuprífero mostrando efecto pepita (Arteaga et al, 1991).

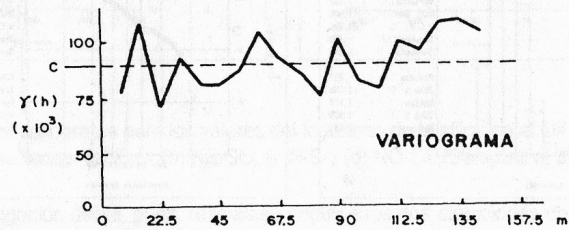
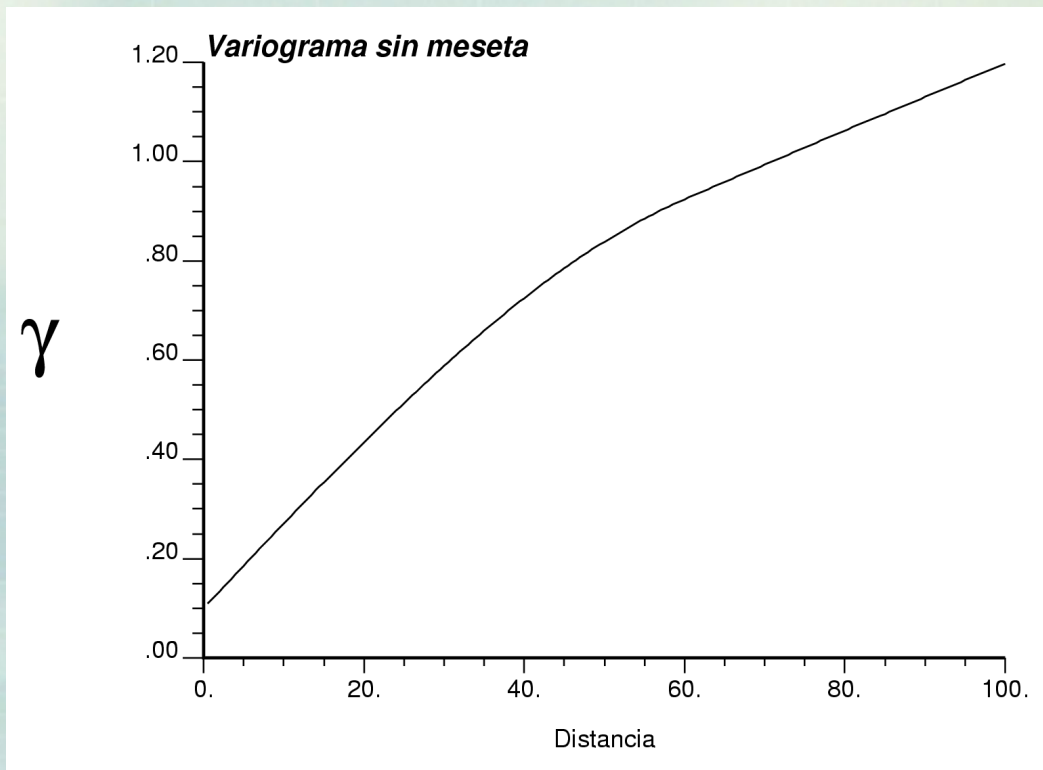


Figura 2.11. Aleatoriedad de la ley en un yacimiento de oro (Arteaga et al, 1991).

# Variograma teórico

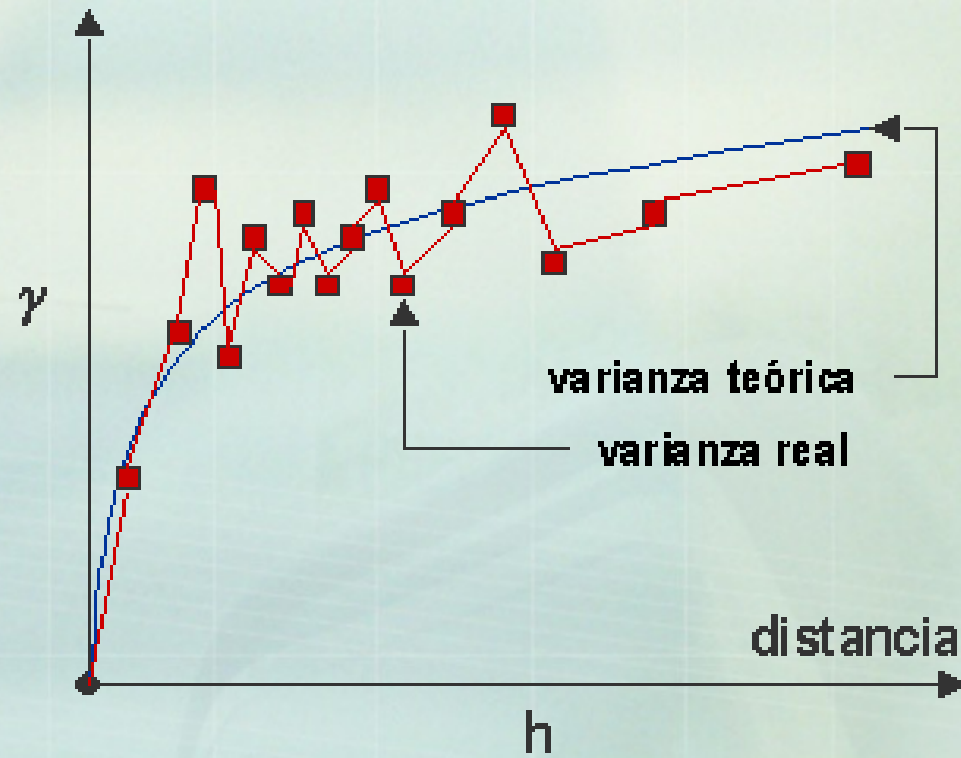
A veces, el variograma sigue creciendo infinitamente.



# Variograma teórico

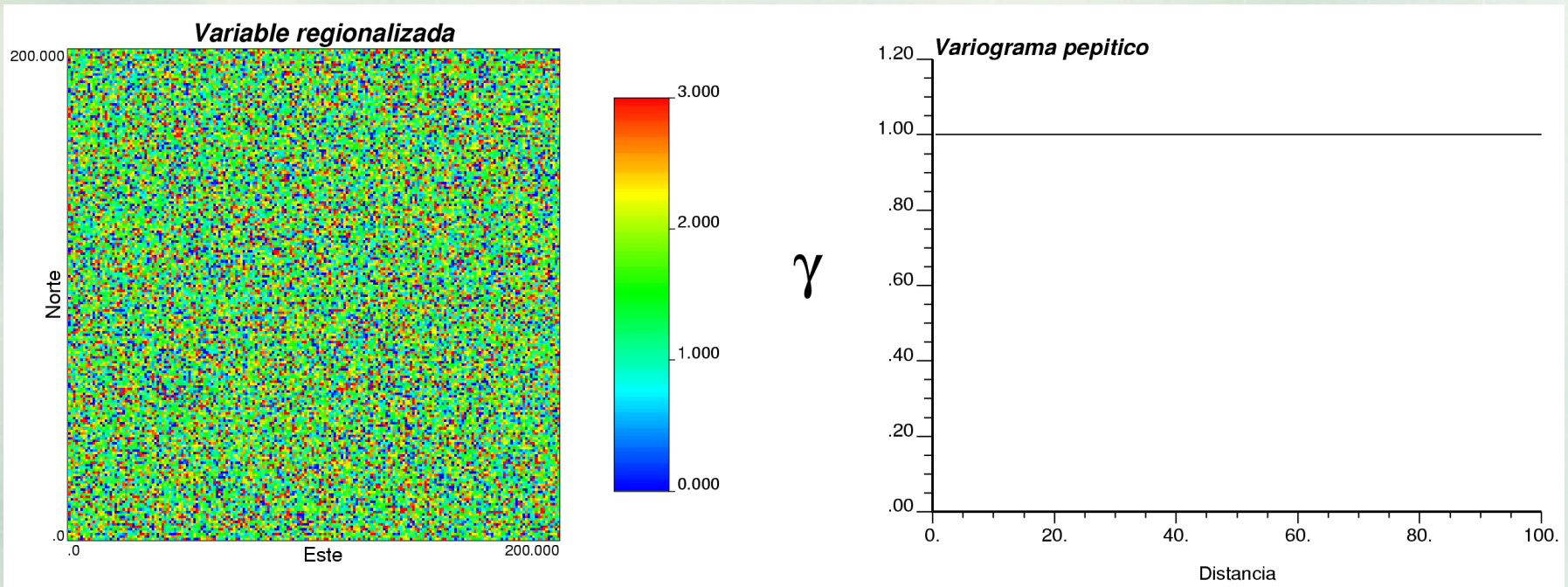
El variograma sólo proporciona una caracterización parcial de la variable regionalizada





# Ausencia de correlación

Efecto pepita:  $\gamma(h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h=0 \\ C & \text{en caso contrario} \end{cases}$  襲



Este modelo se traduce en una ausencia total de correlación en el espacio: dos muestras distintas tienen valores independientes.

# Modelo Esférico

$$\gamma(h) = \begin{cases} s \left( \frac{3}{2} \frac{|h|}{a} - \frac{1}{2} \frac{|h|^3}{a^3} \right) & \text{si } |h| \leq a \\ s & \text{si } |h| > a \end{cases}$$

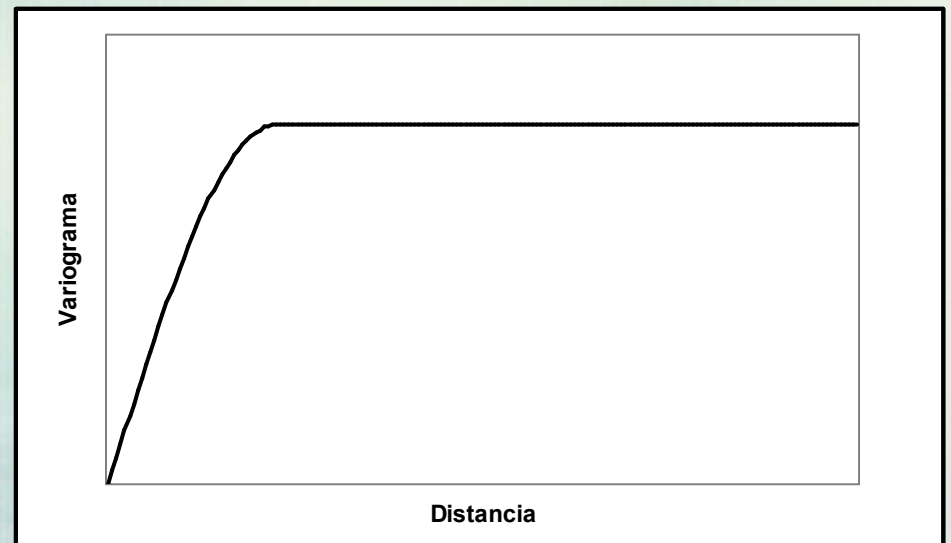
Rango  $s$  y sill  $a$

Comportamiento lineal en el origen

Pendiente igual a  $1.5 s/a$

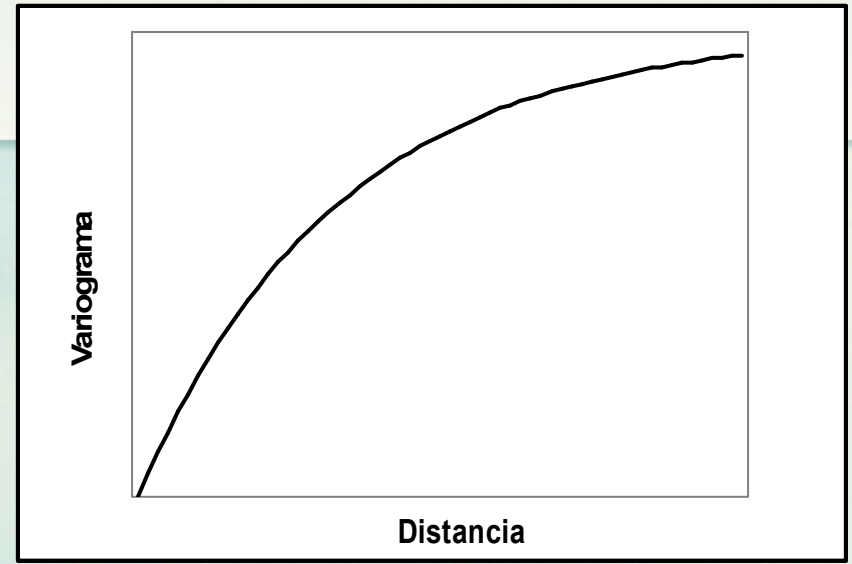
Representa fenómenos continuos

Es uno de los modelos de variograma más utilizados



# Modelo Exponencial

$$\gamma(h) = s \left( 1 - \exp\left(-\frac{|h|}{a}\right) \right)$$



Sill  $S$  que alcanza asintóticamente

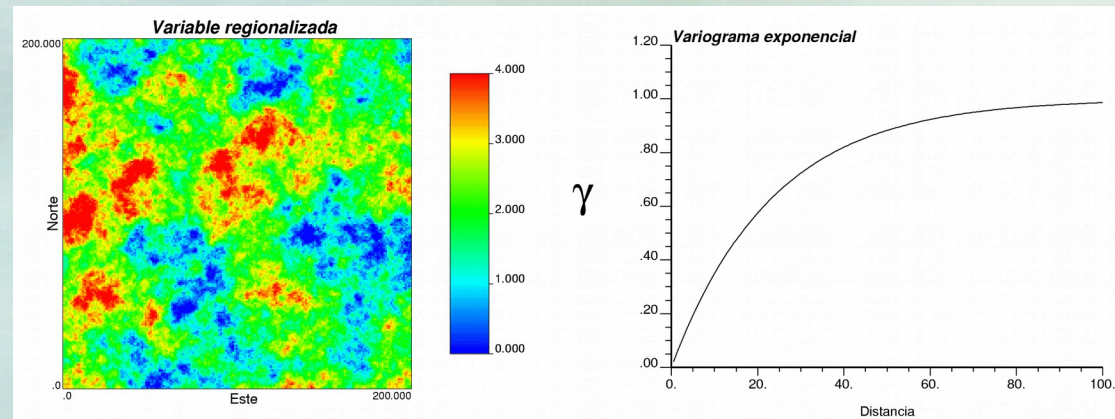
Rango aparente igual a  $a$

Rango experimental igual a  $3a$

Comportamiento lineal en el origen

Pendiente igual a  $3s/a$

Representa fenómenos continuos





# Modelo Gaussiano

$$\gamma(h) = s \left( 1 - \exp \left( -\frac{|h|^2}{a^2} \right) \right)$$

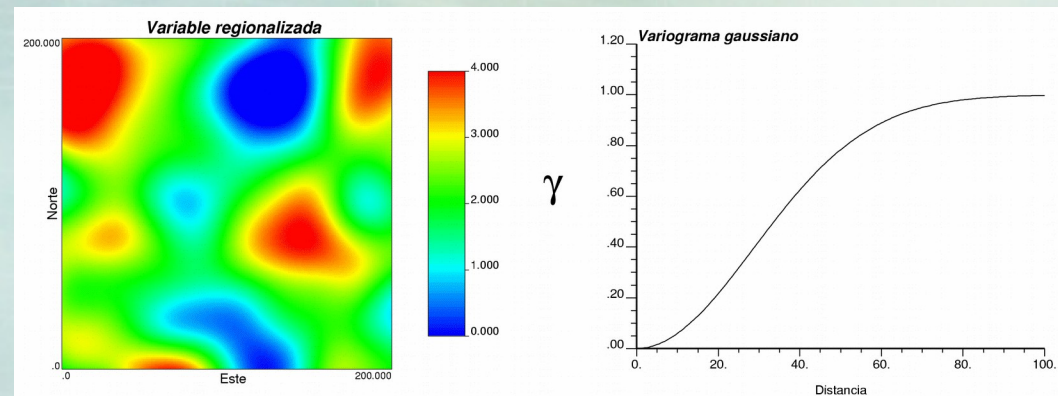
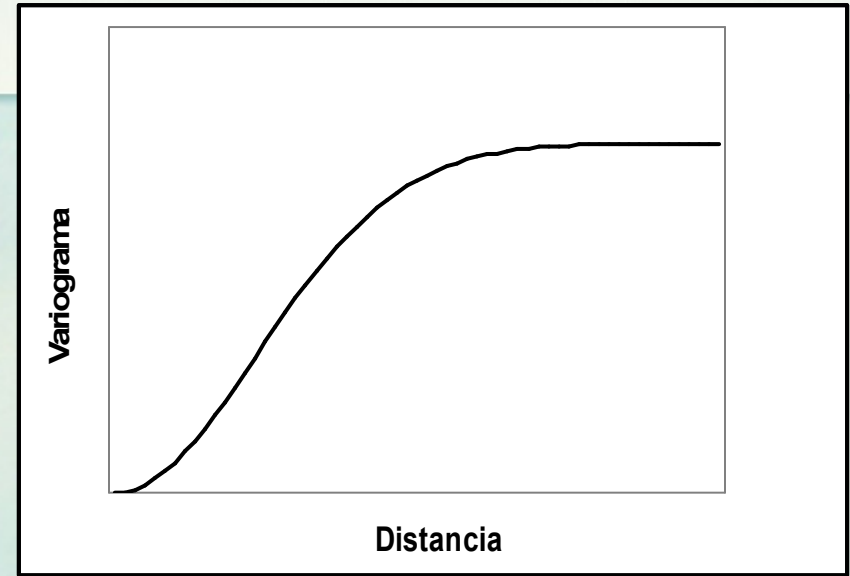
Sill  $S$  que alcanza asintóticamente

Rango aparente igual a  $a$

Rango experimental igual a  $\sqrt{3} a$

Comportamiento cuadrático en el origen

Representa fenómenos sumamente continuos



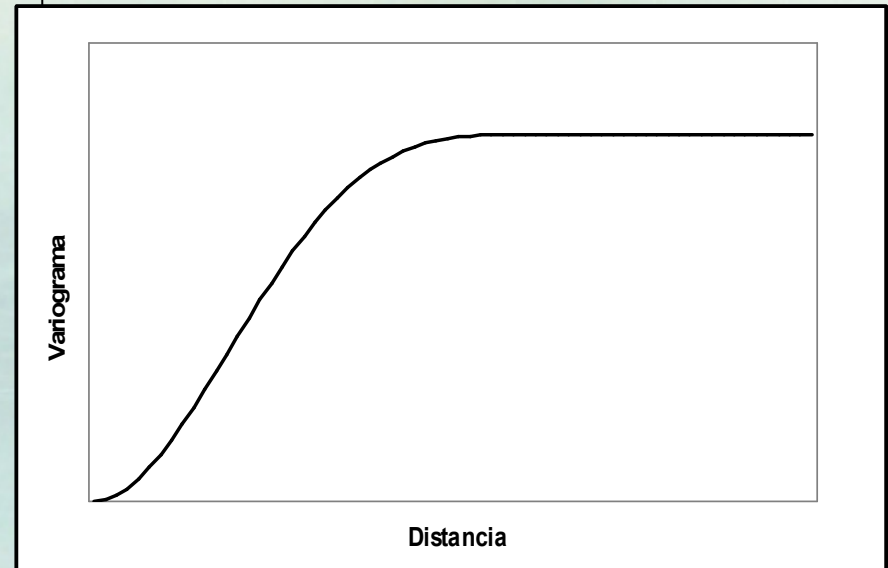
# Modelo Cúbico

$$\gamma(h) = \begin{cases} s \left( 7 \frac{|h|^2}{a^2} - 8.75 \frac{|h|^3}{a^3} + 3.5 \frac{|h|^5}{a^5} - 0.75 \frac{|h|^7}{a^7} \right) & \text{si } |h| \leq a \\ s & \text{si } |h| > a \end{cases}$$

Rango  $a$  y sill  $s$

Comportamiento cuadrático en el origen

Representa fenómenos bastante continuos



## Modelo Seno Cardinal

$$\gamma(h) = s \left( 1 - \frac{\text{seno}(|h|/a)}{|h|/a} \right)$$

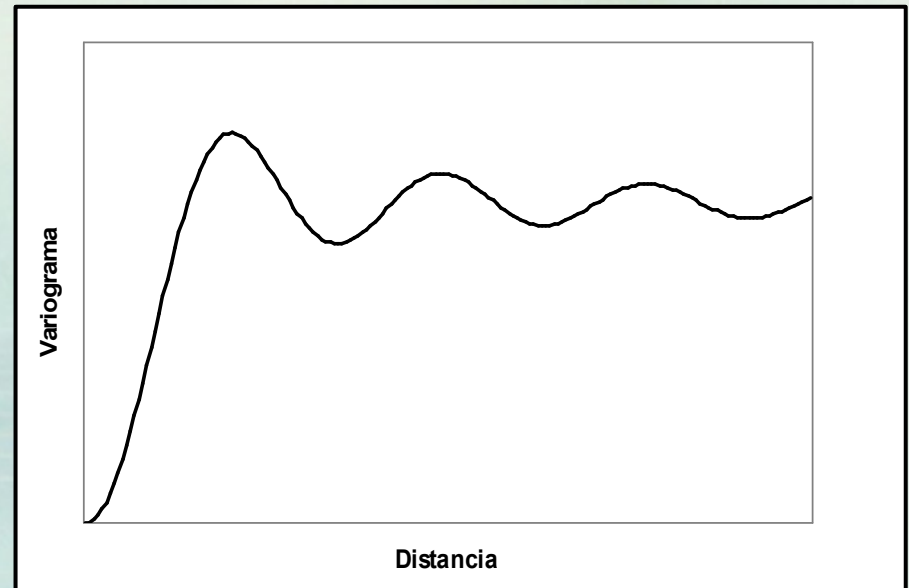
Sill  $S$  que alcanza asintóticamente

Rango aparente igual a  $a$

Rango experimental igual a  $3a$

Comportamiento cuadrático en el origen

Se utiliza para representar fenómenos continuos con periodicidades



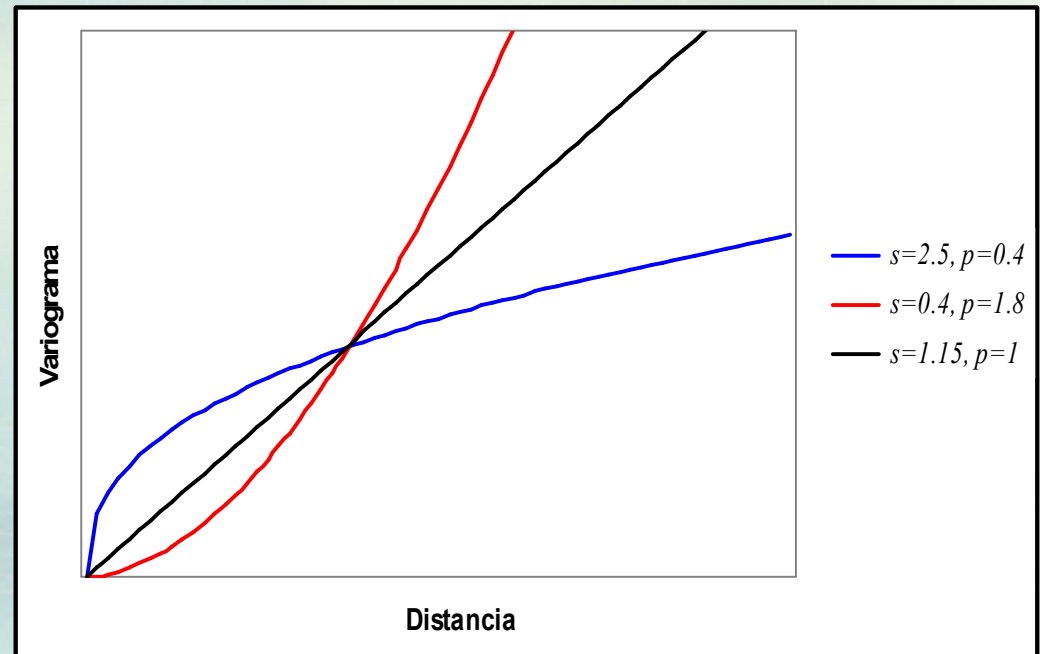
$$\gamma(h) = s |h|^p$$

$s$  se denomina factor de escala

$$0 \leq p < 2$$

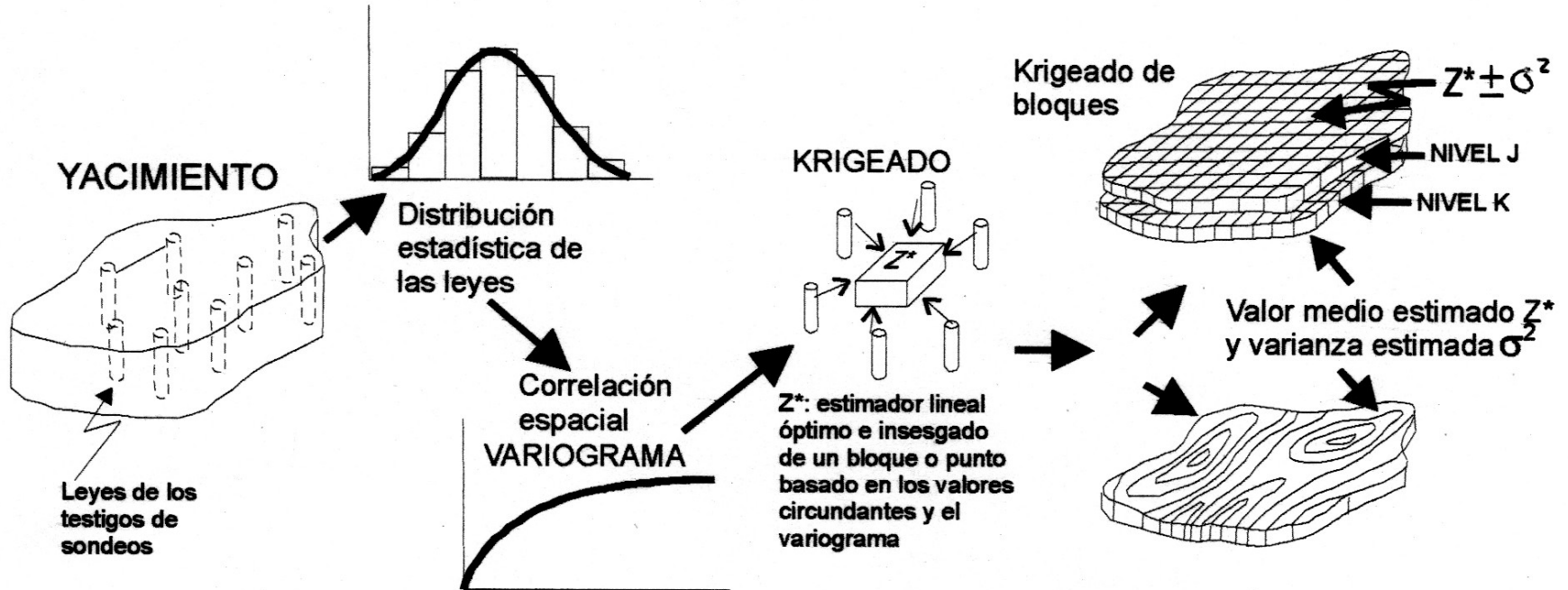
El comportamiento en el origen depende del valor de  $p$

Representa fenómenos no estacionarios



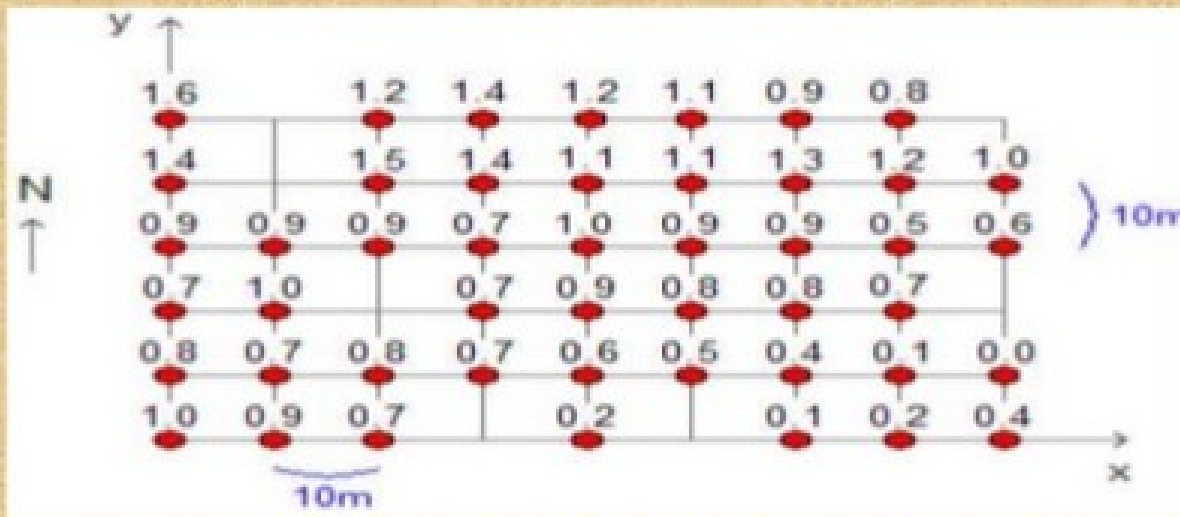


# Esquema de uso de datos.

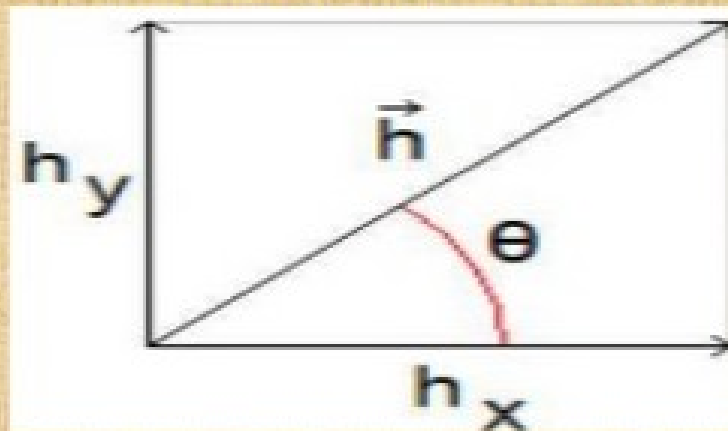


# CÁLCULO DEL VARIOGRAMA PARA UNA MALLA REGULAR BIDIMENSIONAL

Supongamos la situación de la figura de abajo (corresponde a leyes de cobre)



En este caso  $h$  es un vector (con coordenadas cartesianas o polares)



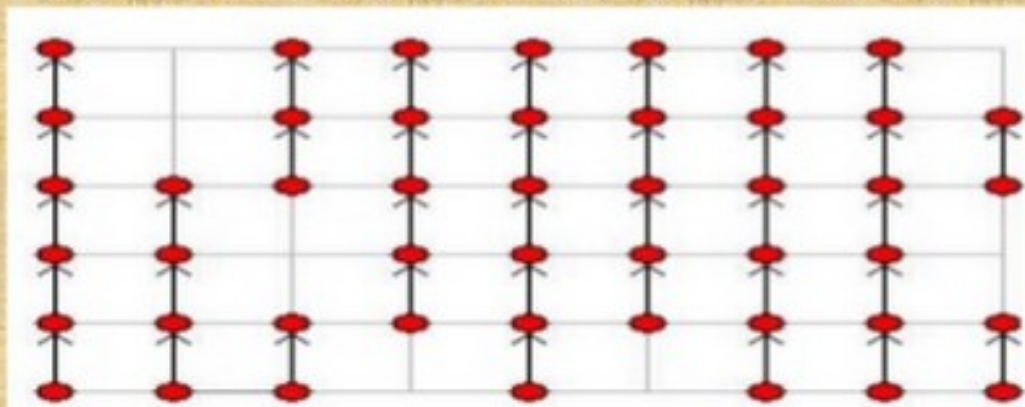
$$h = (h_x, h_y) \leftarrow \text{coord. cartesianas}$$

$$h = (|h|, \theta) \leftarrow \text{coord. polares}$$

*Componentes del vector  $h$ , en este dibujo  $\theta$  no es el azimut sino el ángulo de coordenadas polares.*

## CÁLCULO DEL VARIOGRAMA PARA UNA MALLA REGULAR BIDIMENSIONAL

Calculemos  $\gamma(h_1) = \gamma_{NS}(10)$ . Al aplicar el algoritmo hay que considerar las (diferencias)<sup>2</sup> posibles:  $(Z_i - Z_j)^2$  cuando ambos datos  $Z_i$  y  $Z_j$  están definidos. La figura muestra las diferencias que hay que calcular:

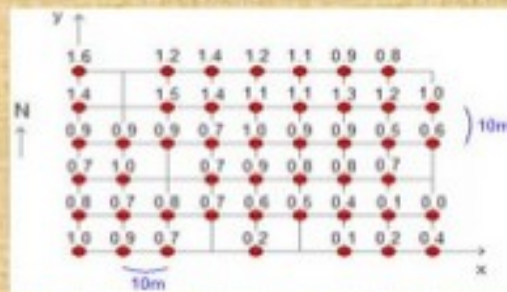


Luego:

$$\begin{aligned} \gamma(h_1) = & [ (1.6 - 1.4)^2 + (1.4 - 0.9)^2 + (0.9 - 0.7)^2 + (0.7 - 0.8)^2 \\ & + (0.8 - 1.0)^2 + (0.9 - 1.0)^2 + (1.0 - 0.7)^2 + (0.7 - 0.9)^2 \\ & + (1.2 - 1.5)^2 + (1.5 - 0.9)^2 + (0.8 - 0.7)^2 + (1.4 - 1.4)^2 \\ & + (1.4 - 0.7)^2 + (0.7 - 0.7)^2 + (0.7 - 0.7)^2 + (1.2 - 1.1)^2 \\ & + (1.1 - 1.0)^2 + (1.0 - 0.9)^2 + (0.9 - 0.6)^2 + (0.6 - 0.2)^2 \\ & + (1.1 - 1.1)^2 + (1.1 - 0.9)^2 + (0.9 - 0.8)^2 + (0.8 - 0.5)^2 \\ & + (0.9 - 1.3)^2 + (1.3 - 0.9)^2 + (0.9 - 0.8)^2 + (0.8 - 0.4)^2 \\ & + (0.4 - 0.1)^2 + (0.8 - 1.2)^2 + (1.2 - 0.5)^2 + (0.5 - 0.7)^2 \\ & + (0.7 - 0.1)^2 + (0.1 - 0.2)^2 + (1.0 - 0.6)^2 \\ & + (0.0 - 0.4)^2 ] / (2 \cdot 36) = 0.0535 \quad (36 \text{ parejas}) \end{aligned}$$

$$\gamma(\vec{h}) = \frac{1}{2} E \left[ \left( Z(x + \vec{h}) - Z(\vec{x}) \right)^2 \right]$$

Parejas posibles para calcular gama de 10 metros en la dirección NS (hay 36 vectores).



De manera análoga se obtiene:

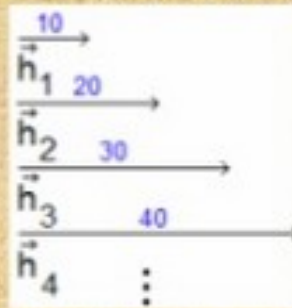
$$\gamma(h_2) = 0.0987 \quad (27 \text{ parejas})$$

$$\gamma(h_3) = 0.1888 \quad (21 \text{ parejas})$$



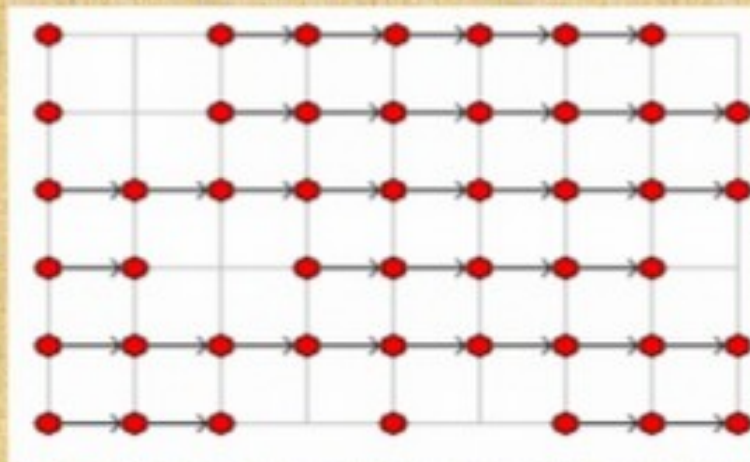
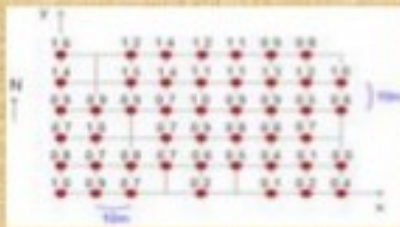
## CÁLCULO DEL VARIOGRAMA PARA UNA MALLA REGULAR BIDIMENSIONAL

Sea ahora la dirección  $\theta = 0^\circ$ , es decir la dirección EW. El vector  $h$  sólo puede ser:



Vectores orientados según dirección EW

Las diferencias que hay que calcular son:



Parejas posibles para calcular gama de 10 metros en la dirección EW (hay 36 vectores).

Se obtiene entonces:

|                        |              |
|------------------------|--------------|
| $\gamma(h_1) = 0.0146$ | (36 parejas) |
| $\gamma(h_2) = 0.0330$ | (33 parejas) |
| $\gamma(h_3) = 0.0431$ | (27 parejas) |



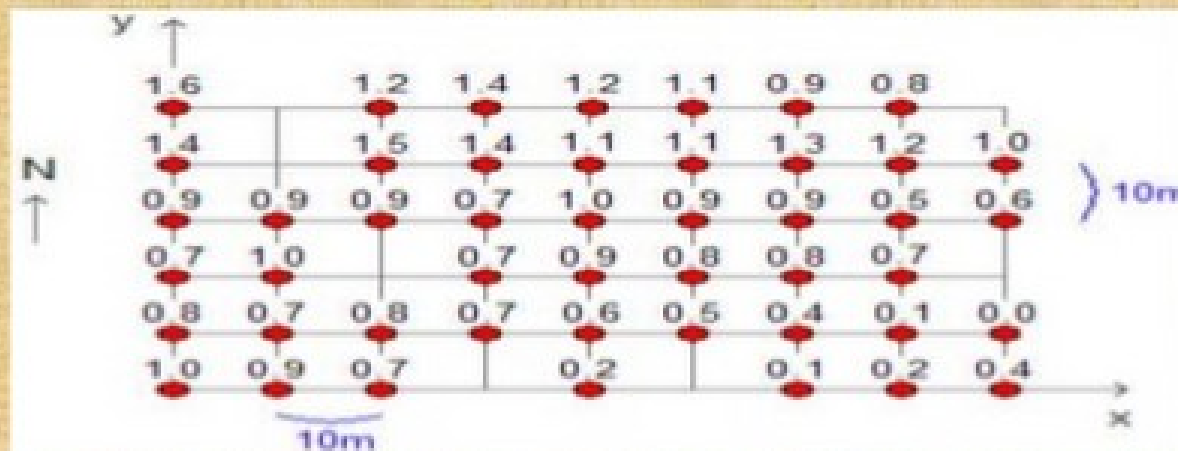
## CÁLCULO DEL VARIOGRAMA PARA UNA MALLA REGULAR BIDIMENSIONAL

Gráfico de  $\gamma(h)$ :

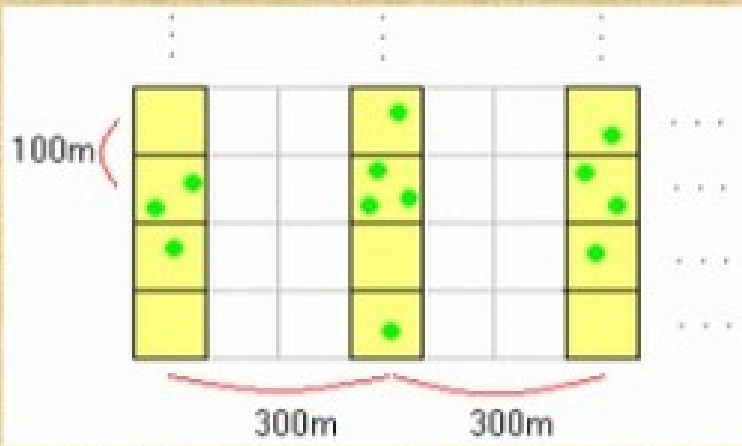


Variograma anisótropo. La variación de las leyes es más regular en la dirección EW que en la NS.

Se observa una clara anisotropía que nos indica que el fenómeno es más regular en la dirección EW que en la NS. (Esto se puede comprobar al mirar como varían las leyes en esas direcciones: ver la figura de abajo)



**Ejemplo:** La figura de abajo, muestra la fotografía aérea de un bosque de coníferas. La variable regionalizada es  $z(x) = \text{número de árboles / hectárea}$ . La malla de reconocimiento es de 300 x 100 m:



Malla de reconocimiento forestal (300m x 100m)

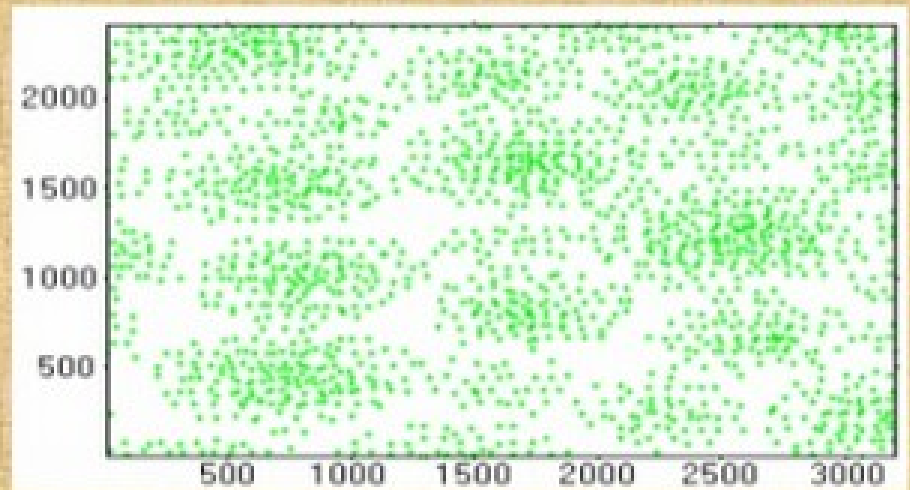
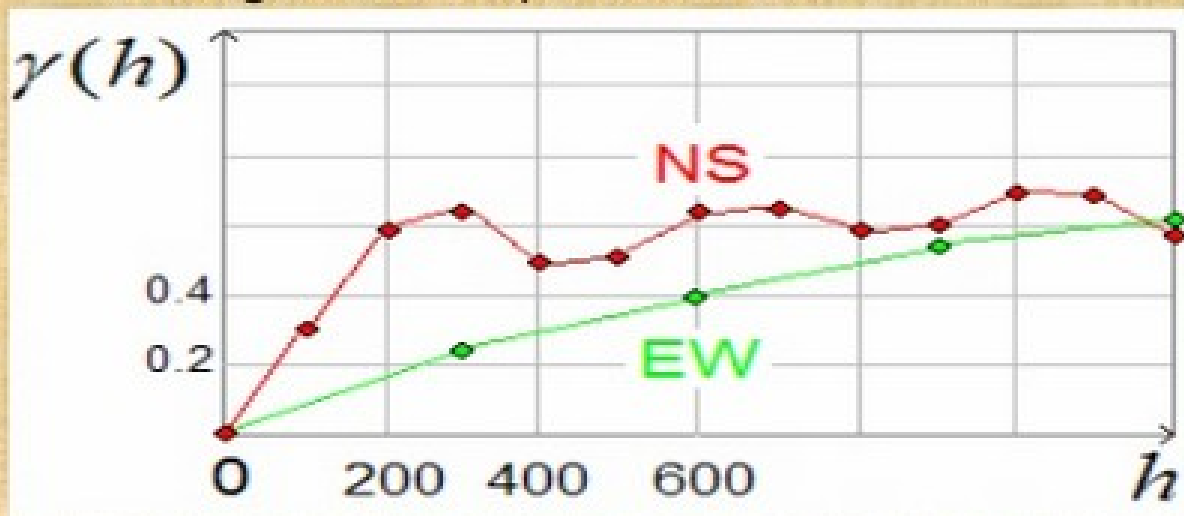


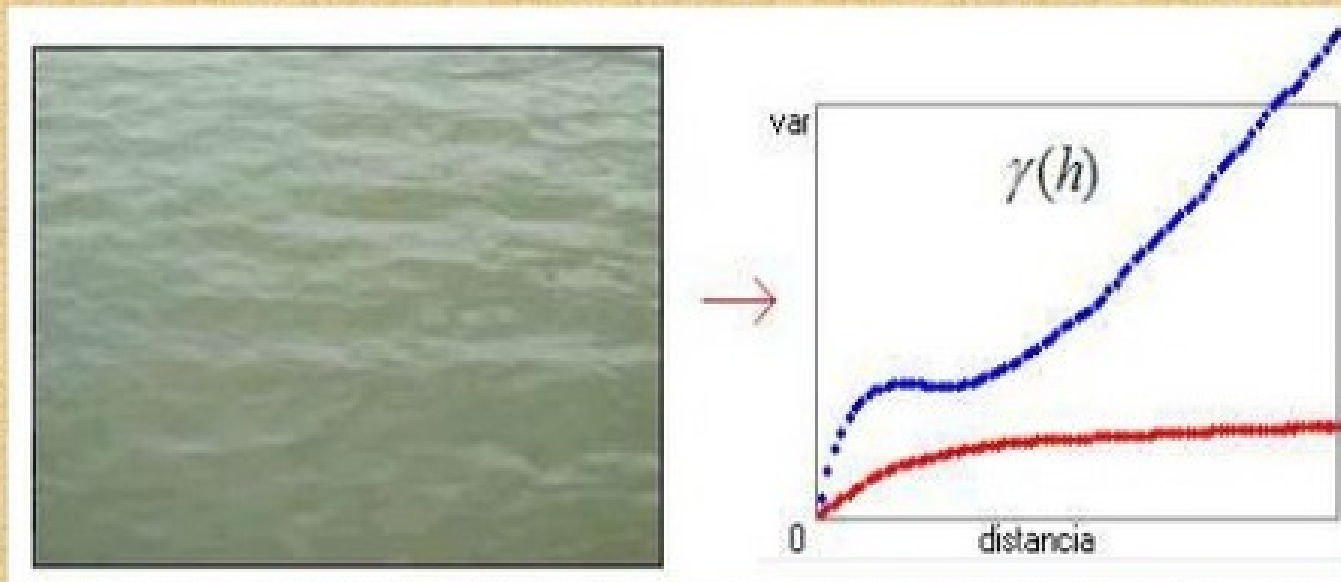
Foto aérea de un bosque. Cada punto representa un árbol.

El variograma correspondiente es:



Variogramas bosque de coníferas, donde se puede observar la presencia de anisotropías y efecto de hoyo (debido a periodicidades).

En vez de utilizar una variable regionalizada con valores 0 o 1 (realización de un conjunto aleatorio), se puede tomar una imagen y asignar a cada pixel el código computacional de su color (normalizado). La figura siguiente ilustra esta situación:



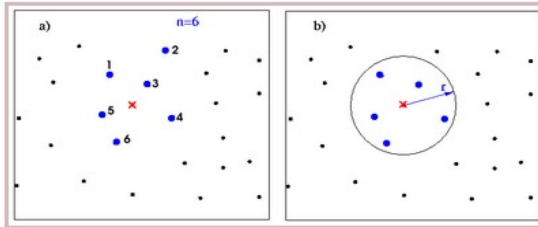
Variograma de una imagen (agua). Observar que la variable regionalizada es estacionaria en la dirección este-oeste, mientras que en la norte-sur tiene una deriva, la cual se manifiesta solo para grandes distancias: Se dice que la realización es “localmente estacionaria” en la dirección NS.

Kriggeado, método desarrollado en el marco de la teoría geoestadística y que utiliza toda la información procedente del semivariograma para obtener unos factores de ponderación optimizados.

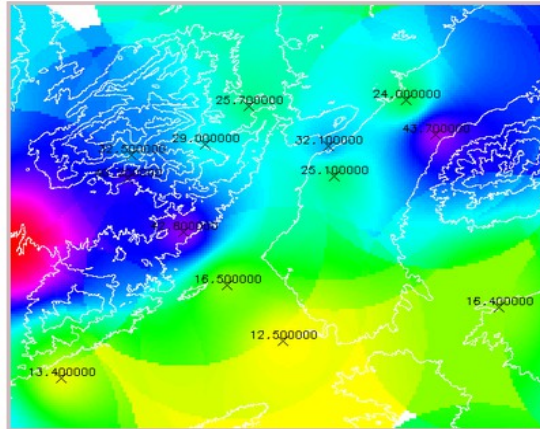
Es un método muy extendido, pero es bastante complejo matemáticamente y muy exigente en cuanto a la calidad de la muestra de puntos y las mediciones realizadas de la variable que se interpola.

Además hay que tener en cuenta que normalmente la función semivariograma se calcula globalmente, sin que se hayan hecho demasiados estudios sobre su variación espacial, y asumiendo que la variable es estacionaria (la media y varianza son constantes en el espacio). Los programas de SIG suelen disponer de herramientas para su utilización o bien de modos de integrar programas específicos de geoestadística.

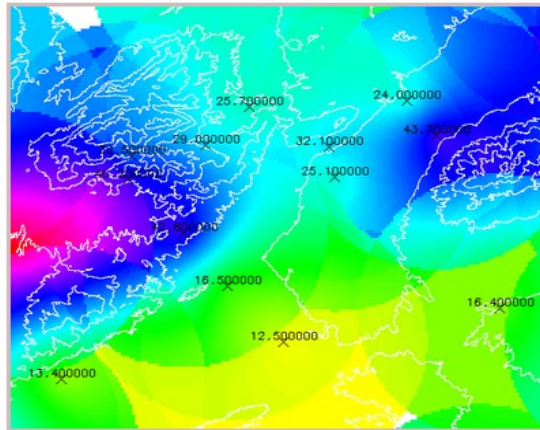




**Figura 55:** Criterios para obtener un conjunto de puntos de interpolación



**Figura 56:** Interpolación por media ponderada por el inverso de la distancia



**Figura 57:** Interpolación por kriggeado