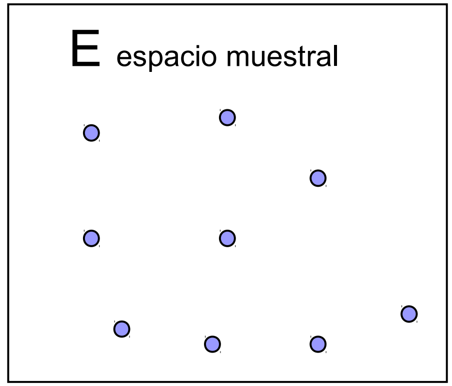
PROBABILIDAD

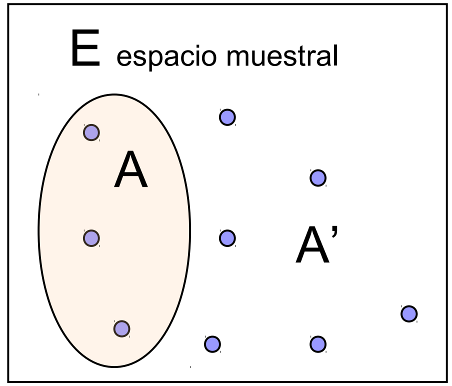
La probabilidad es un método por el cual se obtiene la frecuencia de un acontecimiento determinado mediante la realización de un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables.

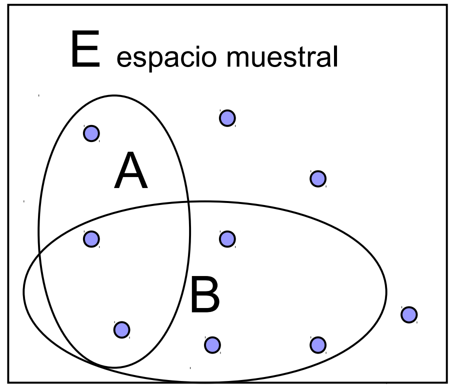
La probabilidad de un suceso es un número, comprendido entre 0 y 1, que indica las posibilidades que tiene de verificarse cuando se realiza un experimento aleatorio.

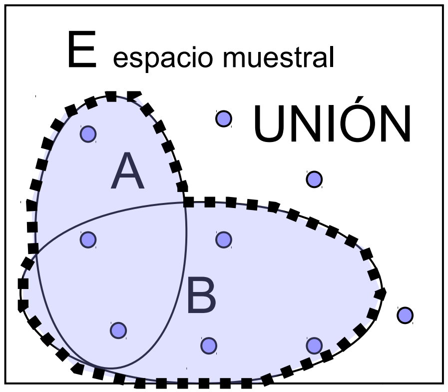
Sucesos

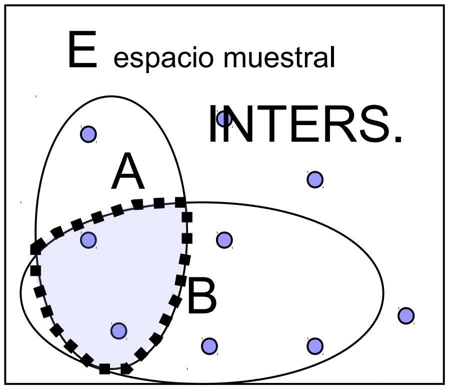
- Suceso es cada posible resultado de un experimento aleatorio
- El conjunto de todos los resultados posibles es el espacio muestral (E)
- Dado un suceso A, el suceso contrario (complementario), A’ (ó A^c), es el formado por los elementos que no están en A
- Se llama suceso unión de A y B, AUB, al formado por los resultados experimentales que están en A o en B (incluyendo los que están en ambos.
- Se llama suceso intersección de A y B, A∩B (o simplemente AB), al formado por los elementos que están en A y B







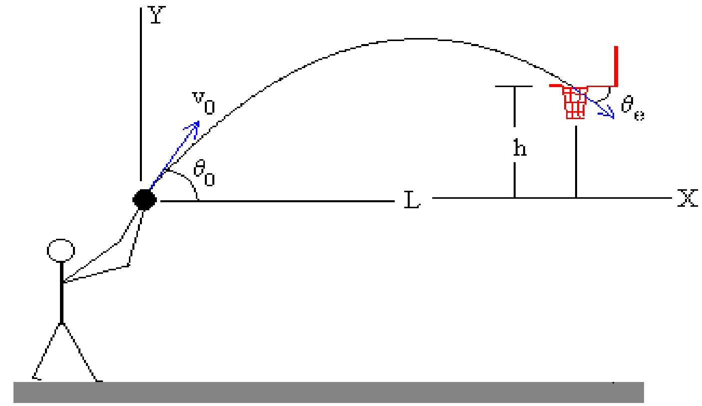




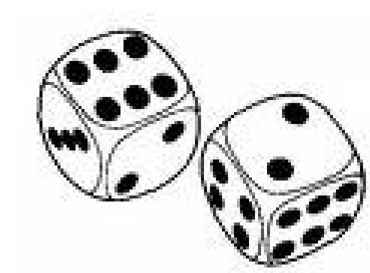
SUCESOS DETERMINISTAS Y ALEATORIOS

Cuando realizamos un experimento, diremos que es:

- Determinista: dadas unas condiciones iniciales, el resultado es siempre el mismo.



- Aleatorio: dadas unas condiciones iniciales, conocemos el conjunto de resultados posibles, pero NO el resultado final.



Eventos mutuamente excluyentes. Dos o más eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos, si no pueden ocurrir simultáneamente. Es decir, la ocurrencia de un evento impide automáticamente la ocurrencia del otro evento (o eventos).

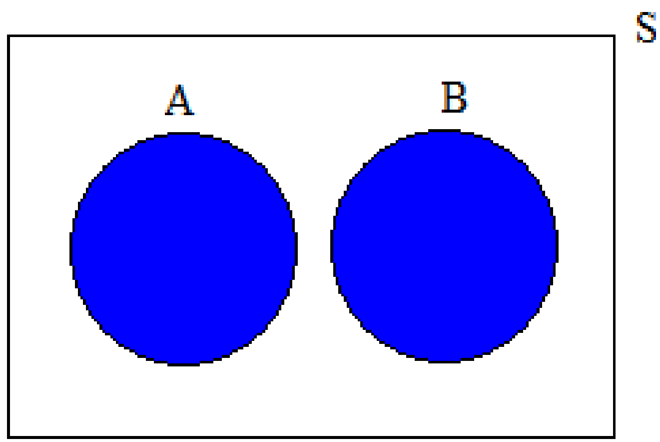
P(AoB) = P(A U B) = P(A) + P(B)

Ejemplo :Al lanzar una moneda solo puede ocurrir que salga cara o sello pero no los dos a la vez,esto quiere decir que estos eventos son excluyentes.

$$P(AoB) = P(A) + P(B)$$

$$o$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$



A U B

En donde:

El conectivo lógico "*o*" corresponde a la "*unión*" en la teoría de conjuntos (o =∪)

El espacio muestral (S) corresponde al conjunto universo en la teoría de conjuntos

1) Sea A el suceso de sacar un As de una baraja estándar de 52 cartas y B sacar un Rey de corazón rojo. Calcular la probabilidad de sacar un As o un Rey de corazón rojo en una sola extracción.

Solución:

A y B son sucesos mutuamente excluyentes porque no es posible obtener ambos a la vez.

Las probabilidades son:

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

$$P(B) = \frac{1}{52}$$

Reemplazando los anteriores valores en la regla particular de la adición de probabilidades para eventos mutuamente excluyentes se obtiene:

$$P(AoB) = P(A) + P(B)$$

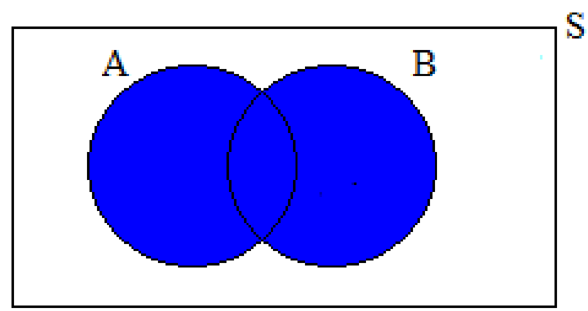
$$P(AoB) = \frac{4}{52} + \frac{1}{52} = \frac{5}{52}$$

EVENTOS NO EXCLUYENTES .Aquellos que pueden suceder al mismo tiempo. Por ejemplo, sacar una carta que tenga el número 5 y que sea de espadas. Sacar una carta roja y una carta de corazones.

$$P(AoB) = P(A) + P(B) - P(AyB)$$

o

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



A U B

En donde:

El conectivo lógico "*o*" corresponde a la "*unión*" en la teoría de conjuntos (o =∪)

El conectivo "*y*" corresponde a la "*intersección*" en la teoría de conjuntos (y =∩)

1) Sea A el suceso de sacar un As de una baraja estándar de 52 cartas y B sacar una carta con corazón rojo. Calcular la probabilidad de sacar un As o un corazón rojo o ambos en una sola extracción.

Solución:

A y B son sucesos no mutuamente excluyentes porque puede sacarse el as de corazón rojo.

Las probabilidades son:

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

$$P(B) = \frac{13}{52}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

Reemplazando los anteriores valores en la regla general de la adición de probabilidades para eventos no mutuamente excluyentes se obtiene:

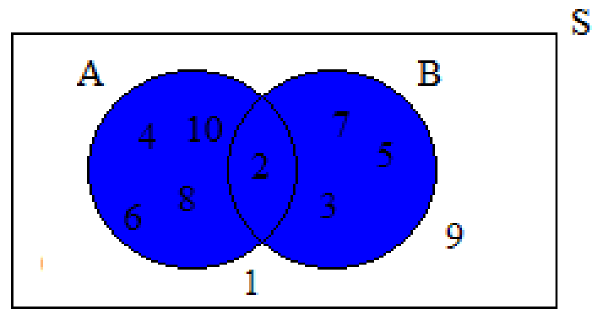
$$P(AoB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(AoB) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

2) En una urna existe 10 bolas numeradas del 1 al 10. ¿Qué probabilidad existe de sacar en una sola extracción una bola enumerada con un número par o con un número primo?

Solución:

A = número par 2,4,6,8,10
B = número primo 2, 3, 5, 7



A ∪ B

$$P(A) = \frac{5}{10}$$

$$P(B) = \frac{4}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

Entonces, aplicando la regla para eventos no mutuamente excluyentes se obtiene:

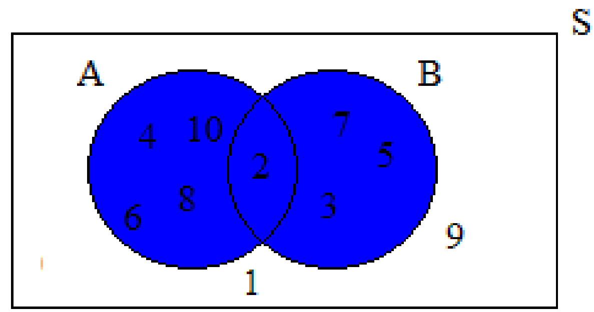
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

2) En una urna existe 10 bolas numeradas del 1 al 10. ¿Qué probabilidad existe de sacar en una sola extracción una bola enumerada con un número par o con un número primo?

Solución:

A = número par 2,4,6,8,10
B = número primo 2, 3, 5, 7



A U B

$$P(A) = \frac{5}{10}$$

$$P(B) = \frac{4}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

Entonces, aplicando la regla para eventos no mutuamente excluyentes se obtiene:

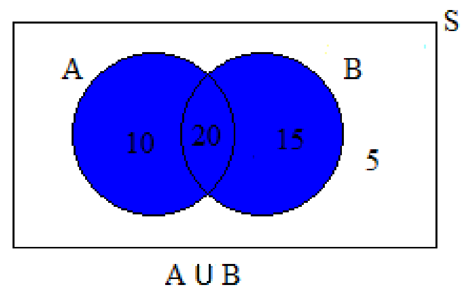
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{10} + \frac{4}{10} - \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

3) En una clase, 10 alumnos tienen como preferencia solamente la asignatura de Matemática, 15 prefieren solamente Estadística, 20 prefieren Matemática y Estadística y 5 no tienen preferencia por ninguna de estas asignaturas. Calcular la probabilidad que de un alumno de la clase seleccionado al azar tenga preferencia por Matemática o Estadística o ambas asignaturas.

Solución:

Matemática y Estadística = 10 + 20 = 30
Estadística = 15 + 20 = 35
Ninguna = 5



$$P(A) = \frac{30}{50}$$

$$P(B) = \frac{35}{10}$$

$$P(A \cap B) = \frac{20}{50}$$

Aplicando la regla para eventos no mutuamente excluyentes se obtiene:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{30}{50} + \frac{35}{50} - \frac{20}{50} = \frac{9}{10}$$

Dos eventos son **independientes** si el resultado del segundo evento no es afectado por el resultado del primer evento. Si A y B son eventos independientes, la probabilidad de que ambos eventos ocurran es el producto de las probabilidades de los eventos individuales.

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo 1:

Una caja contiene 4 canicas rojas, 3 canicas verdes y 2 canicas azules. Una canica es eliminada de la caja y luego reemplazada. Otra canica se saca de la caja. Cuál es la probabilidad de que la primera canica sea azul y la segunda canica sea verde?

Ya que la primera canica es reemplazada, el tamaño del espacio muestral (9) no cambia de la primera sacada a la segunda así los eventos son independientes.

$$P(\text{azul luego verde}) = P(\text{azul}) \cdot P(\text{verde})$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{6}{81} = \frac{2}{27}$$

Dos eventos son **dependientes** si el resultado del primer evento afecta el resultado del segundo evento así que la probabilidad es cambiada. En el ejemplo anterior, si la primera canica no es reemplazada, el espacio muestral para el segundo evento cambia y así los eventos son dependientes. La probabilidad de que ambos eventos ocurran es el producto de las probabilidades de los eventos individuales:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo 2:

Una caja contiene 4 canicas rojas, 3 canicas verdes y 2 canicas azules. Una canica es eliminada de la caja y no es reemplazada. Otra canica se saca de la caja. Cuál es la probabilidad de que la primera canica sea azul y la segunda canica sea verde?

Ya que la primera canica no es reemplazada, el tamaño del espacio muestral para la primera canica (9) es cambiado para la segunda canica (8) así los eventos son dependientes.

$P(\text{azul luego verde}) = P(\text{azul}) \cdot P(\text{verde})$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}$$

- Probabilidad
  - Clásica
  - Frecuentista
  - Relativa

CONCEPCIÓN CLÁSICA DE LA PROBABILIDAD

- Un experimento está sujeto al azar con n posibles resultados mutuamente excluyentes donde n_A es el número de casos favorables. La probabilidad de que suceda A es:

$$P(A) = n_A/n$$

- Ejemplos:

  - Con una baraja española, al sacar una carta ¿cuál es la probabilidad de sacar un número menor o igual que 3?

    12/40=3/10

  - Al lanzar un dado perfectamente equilibrado, ¿cuál es la probabilidad de sacar un número impar?

    3/6=1/2

CONCEPCIÓN FRECUENTISTA DE LA PROBABILIDAD

La probabilidad de un suceso es la frecuencia relativa de veces que ocurriría el suceso al realizar un experimento repetidas veces.

$$P = Fx / F$$

Fx = Frecuencia de un evento durante muchos intentos
F = Frecuencia total

CONCEPCIÓN SUBJETIVA DE LA PROBABILIDAD

- Subjetiva: Grado de certeza que se posee sobre un suceso. Es personal y se puede formular, por ejemplo, en términos de apuestas:

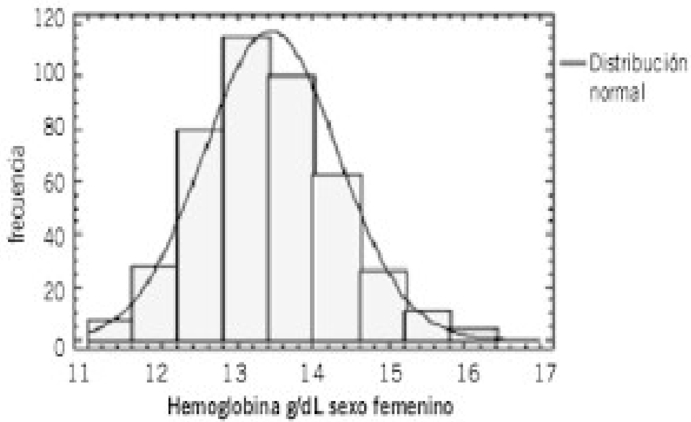
Ejemplo: Ganar un curso

- ¿Qué sucede si otras personas también están estudiando el calibre de los árboles de esa región, y tienen muestras con promedios y desviaciones estándar diferentes ?

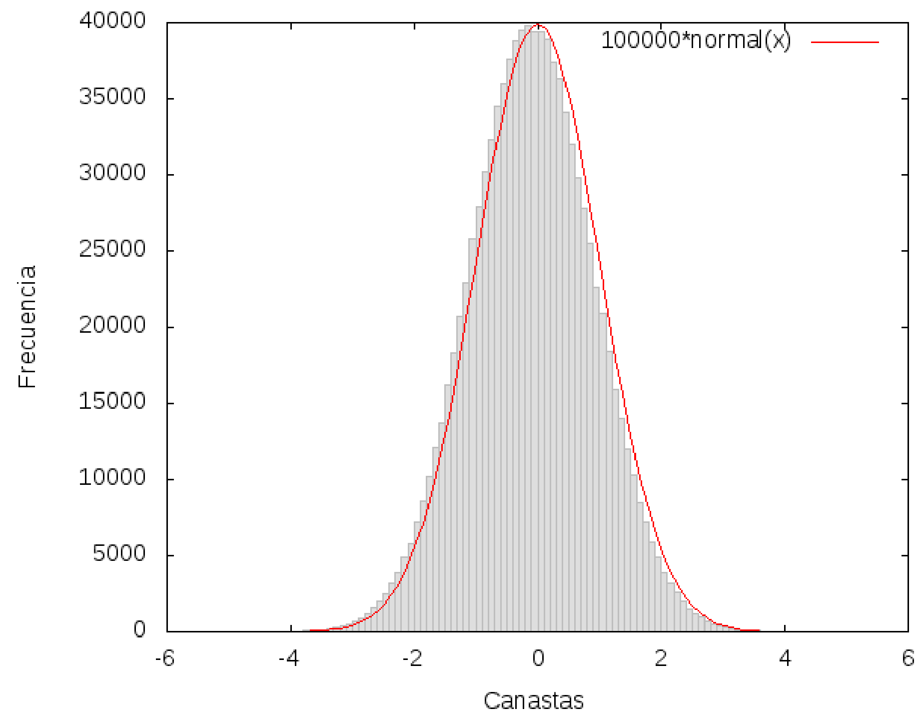
Media = 1.96
Dev. St. = 0.38

Media = 1.83
Dev. St. = 0.60

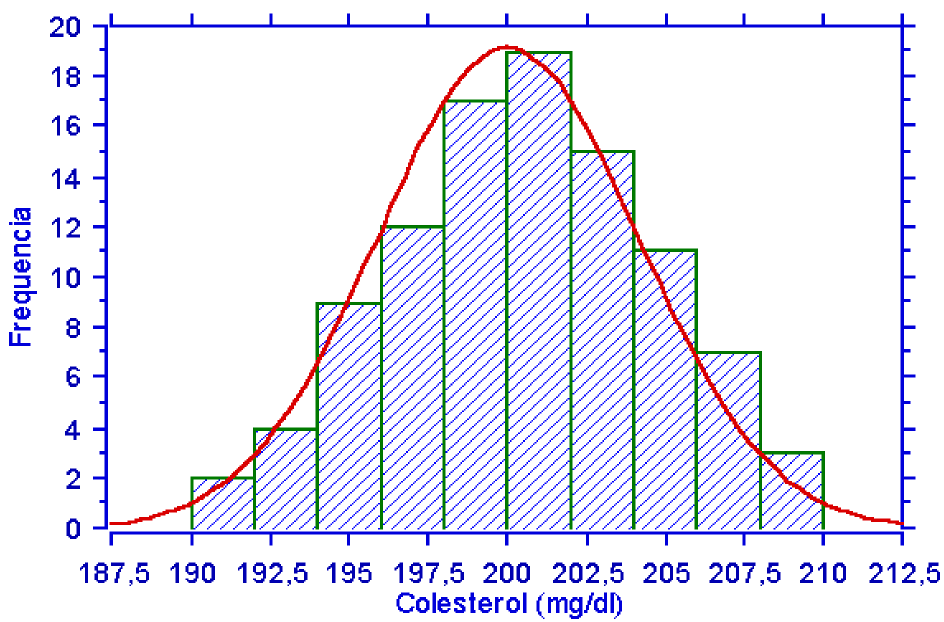
Media = 1.91
Dev. St. = 0.48



120
100
80
60
40
20
0
frecuencia
11 12 13 14 15 16 17
Hemoglobina g/dL sexo femenino
Distribución normal



40000
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
Frecuencia
-6 -4 -2 0 2 4 6
Canastas
100000*normal(x)



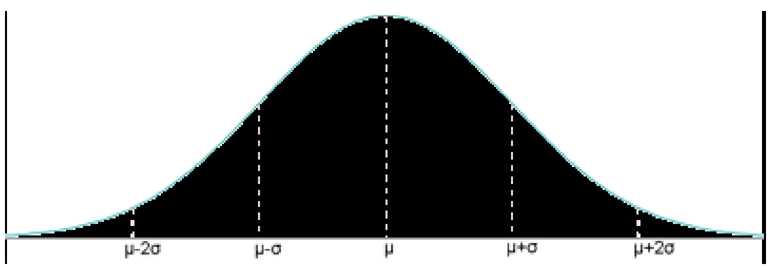
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
Frequencia
187,5 190 192,5 195 197,5 200 202,5 205 207,5 210 212,5
Colesterol (mg/dl)

Una **variable aleatoria continua**, **X**, sigue una **distribución normal** de **media μ** y **desviación típica σ**, y se designa por **N(μ, σ)**, si se cumplen las siguientes condiciones:

1. La variable puede tomar cualquier valor: (-∞, +∞)

2. La **función de densidad**, es la expresión en términos de ecuación matemática de la **curva de Gauss**:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



El campo de existencia es cualquier valor real, es decir, (-∞, +∞).

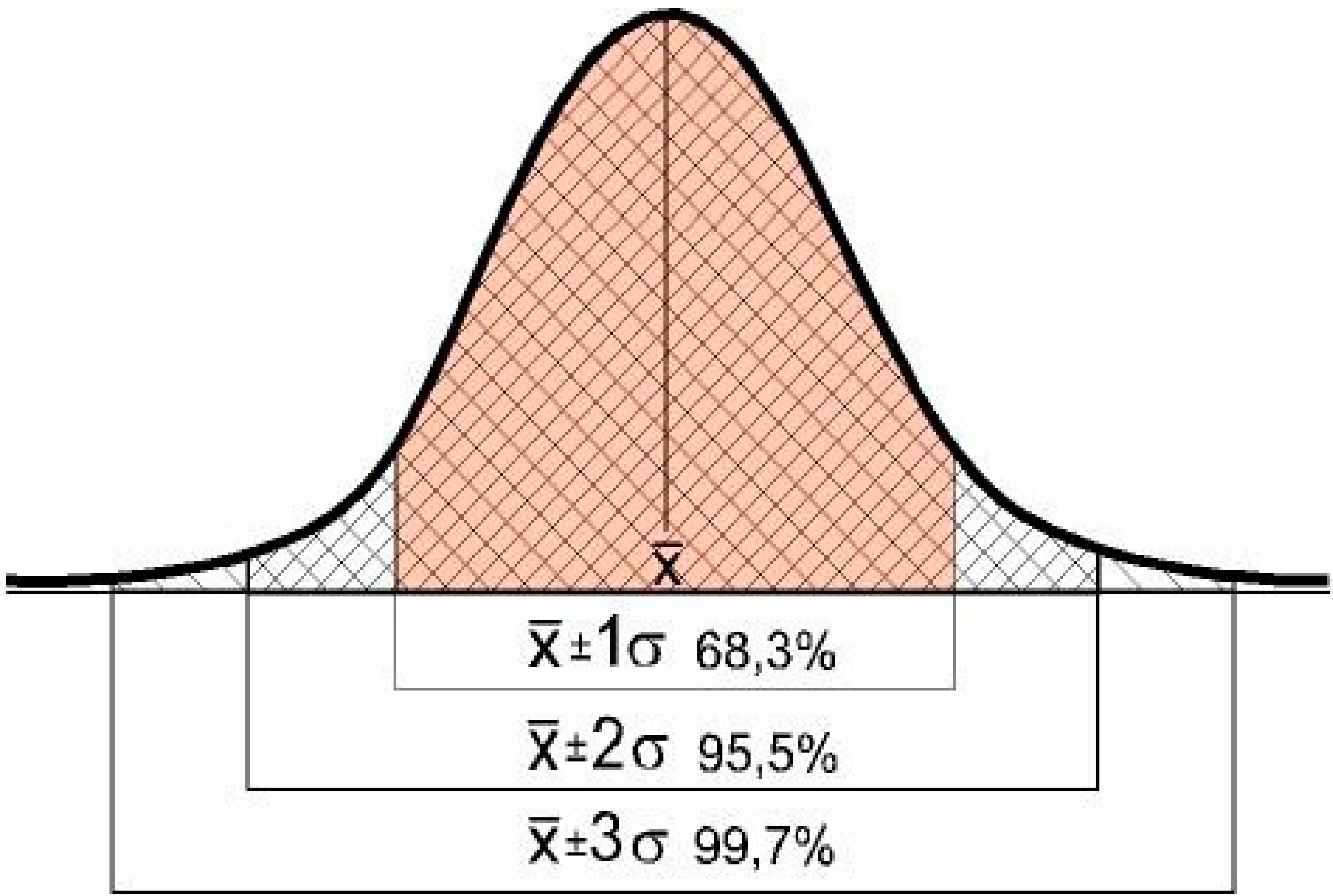
Es simétrica respecto a la media μ.

Tiene un máximo en la media μ.

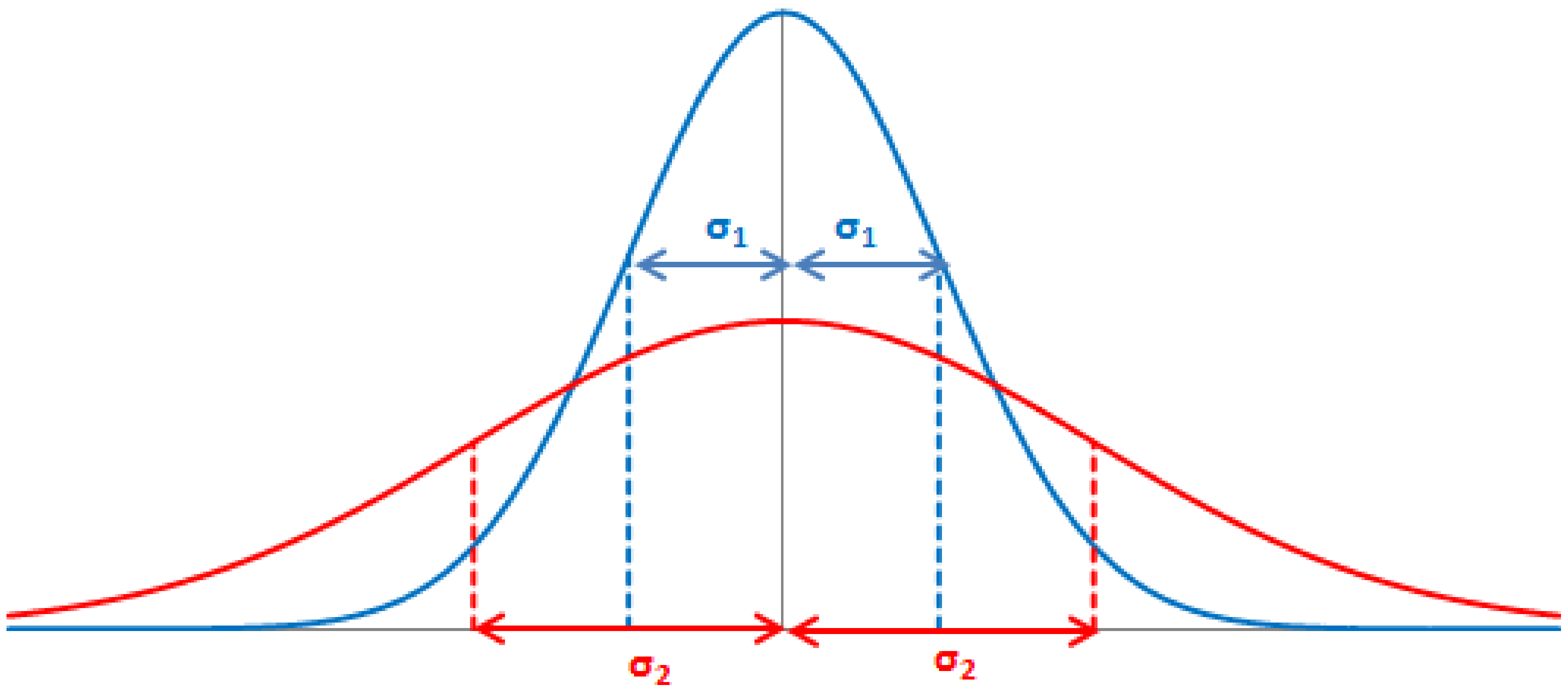
Crece hasta la media μ y decrece a partir de ella.

En los puntos μ − σ y μ + σ presenta puntos de inflexión.

El eje de abscisas es una asíntota de la curva.


$\bar{x}$
$\bar{x} \pm 1\sigma$ 68,3%
$\bar{x} \pm 2\sigma$ 95,5%
$\bar{x} \pm 3\sigma$ 99,7%

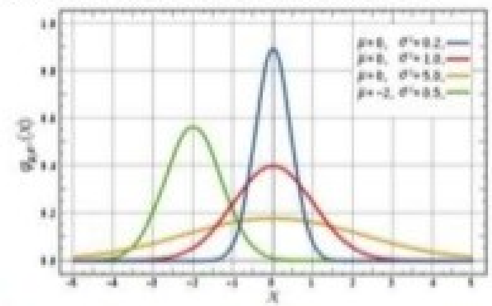
Dos distribuciones normales con diferentes desviaciones típicas σ



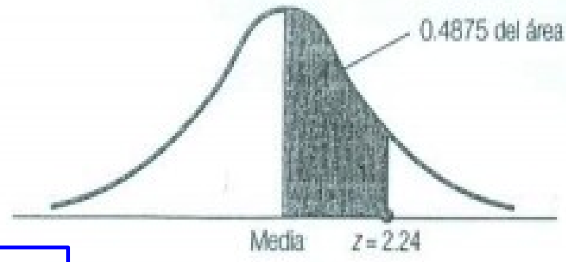
Es posible expresar cualquier distribución normal como una de la forma unitaria (N(0,1)), la cual se denomina distribución normal tipificada.

- Distribución especial que representa a todas las variables aleatorias normales y que es la distribución de otra variable normal llamada Z:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$



- =NORMALIZACION(x;media;desv_estándar)
- Z se la conoce como variable aleatoria estandarizada.
- Esta función se caracteriza por tener media igual a cero y desviación tipificada igual a uno : N(0,1)
- Representa a todas las distribuciones Normales. Igual densidad de probabilidad, si medimos desviaciones de media en base a σ.
- Valores obtenidos de tabla Normal válidos para todas las distribuciones Normal de media = μ y varianza =σ^2.



Apéndice Tabla 1

*Áreas bajo la curva de distribución de probabilidad normal estándar, entre la media y valores positivos de z

Ejemplo:

Para encontrar el área bajo la curva entre la media y un punto que está a 2.24 desviaciones estándar a la derecha de la media, busque el valor que se encuentra a la altura del renglón correspondiente a 2.2 y en la columna del 0.04; 0.4875 del área bajo la curva se encuentra entre la media y un valor de z de 2.24.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

*Tomado de Robert D. Mason, *Essentials of Statistics*, © 1976, p. 307 Reimpreso con licencia de Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ.

Ejercicios:

1. En una fábrica donde se hacen tornillos se ha tratado que todos tengan una longitud de 13.0 cm. Sin embargo eso no se cumple siempre y se sabe que existe una desviación estándar de 0.1 cm y que la distribución que se sigue es normal. Determine la probabilidad de que un tornillo escogido al azar se encuentre entre los 13.0 y 13.2 cm e ilustre la proporción de área bajo la curva asociada a este valor de probabilidad.

2. Un río posee un caudal medio de 29.8 m/s y una desviación estándar de 8.1 m3/s

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el río supere los 40 m3/s?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que el rio disminuya su caudal a un valor de 17.3 m3/s durante la estación seca.
c) ¿Cuál es la probabilidad de que el río tenga un caudal de entre 27 y 31 m3/s?

3. En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23 grados y desviación estándar 5 grados.

a) Calcular el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21 y 27 grados.
b) Calcular la probabilidad de que la temperatura descienda por debajo de los 20 grados.